

Résolution d'équations non linéaires

(IS104 - Algorithmique Numérique)

ENSEIRB-MATMECA - INP Bordeaux

Semestre 6

- 1 Préambule
- 2 Présentation du problème
- 3 Méthodes itératives
 - Méthode de la Dichotomie ou Bissection
 - Méthode du point fixe
 - Méthode de Newton
 - Méthode de la Sécante
 - Méthode de la Fausse position (Regula Falsi)
 - En dimension >1
- 4 Racines de polynômes
 - Majoration des racines
 - Localisation des racines
 - Méthode générale - Technique de déflation
- 5 Extremum local
 - Fonctions réelles
 - En dimension >1

La résolution des problèmes non linéaires est en général plus difficile que les problèmes linéaires vus précédemment :

- Problème de modélisation plus difficile que pour les modèles linéaires.
- Problèmes de critères pour les conditions d'existence et d'unicité.
- Pas de méthode permettant une résolution exacte.

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^n). On cherche la (les) solution(s) de l'équation « $f(x) = 0$ » (ou autrement dit, les racines de f).

- Exemple fondamental : Les polynômes.
- Autre problématique proche : recherche des extrema locaux d'une fonction.

Pour la résolution, on aura besoin (en général) d'hypothèses de régularité sur f .

- Usuellement, au moins continue.
- Avec des fonctions \mathcal{C}^1 (voir mieux), on pourra établir des bornes sur les vitesses de convergence.
- Si la fonction n'est pas \mathcal{C}^1 , cela n'empêche pas les algorithmes de fonctionner et converger.

Complexité : On la mesure en nombre d'appels de f .

Méthodes itératives

- **Principe** : Construction d'une suite qui converge vers la solution (donc pas de calcul direct mais une méthode de calcul approché).

- **Principe** : Construction d'une suite qui converge vers la solution (donc pas de calcul direct mais une méthode de calcul approché).
- **Vitesse de convergence** : Évaluée en regardant l'erreur d'approximation ε_k au rang k et ses variations :

$$\varepsilon_{k+1} = c(\varepsilon_k)^m \text{ avec } c > 0 \text{ et } m \geq 1 \text{ (et si } m = 1, c < 1)$$

- ▶ $m = 1$: Convergence linéaire (gain d'un nombre constant de décimales à chaque itération)
- ▶ $m > 1$: Convergence superlinéaire (le gain du nombre de décimales augmente à chaque itération)
- ▶ $m = 2$: Convergence quadratique (le nombre de décimales double à chaque itération)

Méthodes itératives

Méthode de la Dichotomie ou Bissection

On se place dans le cas où f est continue et $f(a)f(b) < 0$.

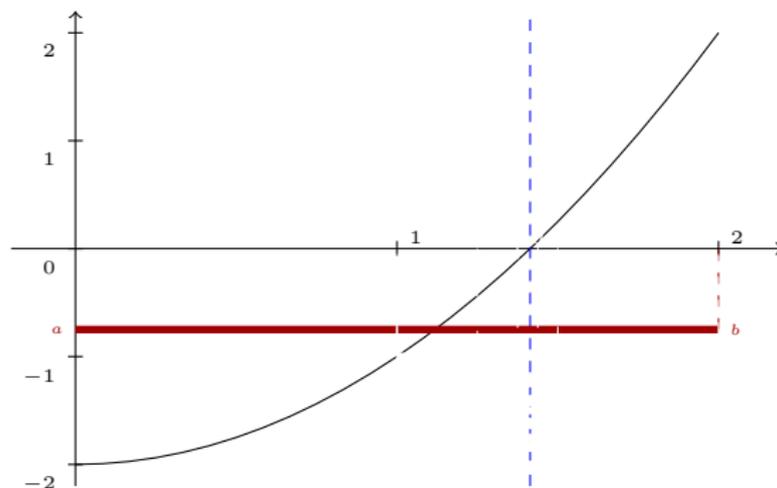
Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure de l'existence d'une racine α dans $[a, b]$.

$\alpha \in [a, b]$: α est dite cloisonnée.

Principe :

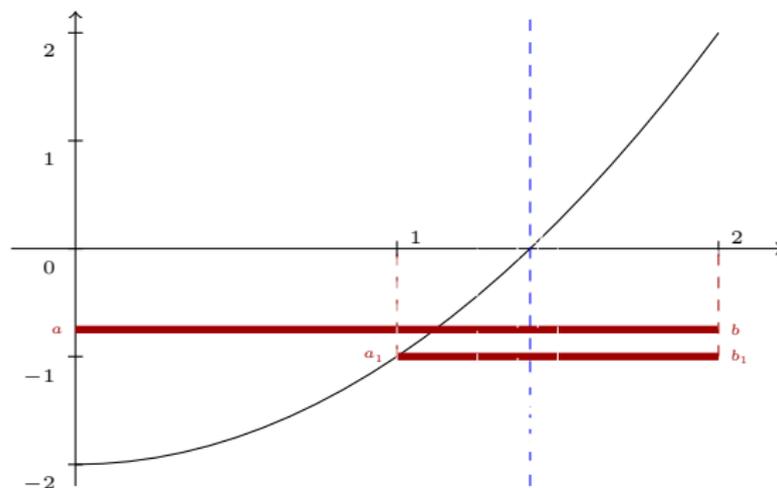
- On prend le milieu de l'intervalle $m = \frac{a+b}{2}$
- On compare les signes de $f(a)$ et de $f(m)$
 - ▶ si $f(a)f(m) \geq 0$ alors $\alpha \in [m, b]$
 - ▶ si $f(a)f(m) < 0$ alors $\alpha \in [a, m]$
- On recommence alors cette procédure dans l'intervalle où se situe la racine ...
Autrement dit, on réalise les affectations :
 - ▶ si $f(a)f(m) \geq 0$ alors $a \leftarrow m$
 - ▶ si $f(a)f(m) < 0$ alors $b \leftarrow m$

Exemple : $x^2 - 2 = 0$ sur $[0; 2]$



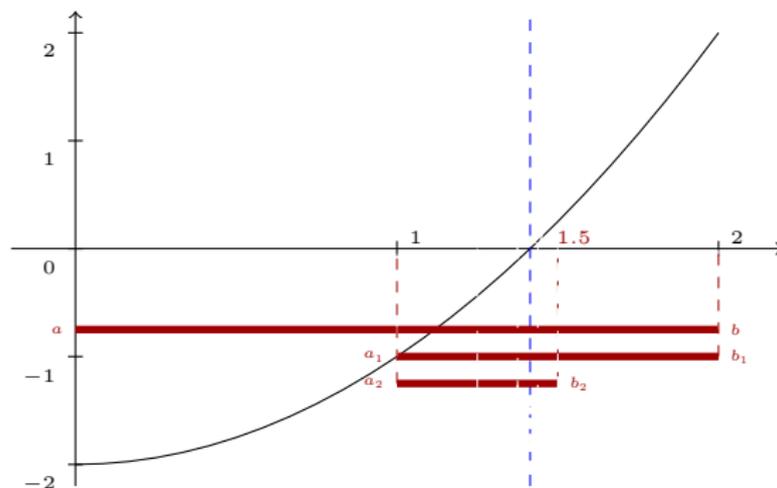
- $f(0)f(2) < 0 \rightarrow a = 0, b = 2$

Exemple : $x^2 - 2 = 0$ sur $[0; 2]$



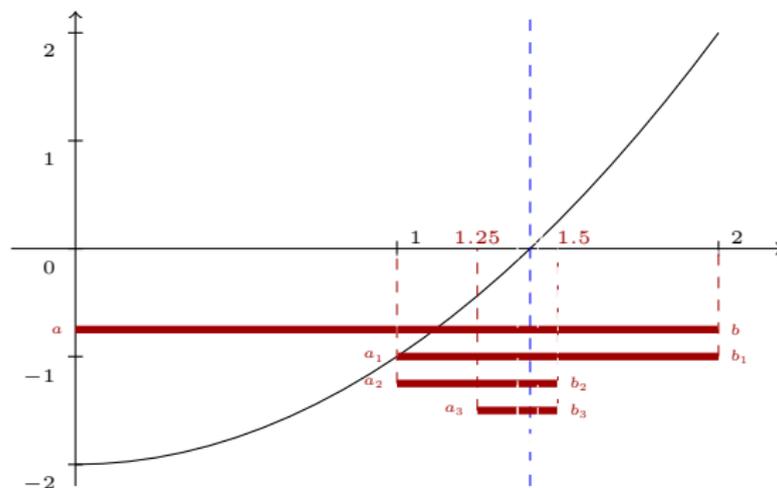
- $f(0)f(2) < 0 \rightarrow a = 0, b = 2$
- $m = 1 \rightarrow f(0)f(1) > 0 \rightarrow a = 1, b = 2$

Exemple : $x^2 - 2 = 0$ sur $[0; 2]$



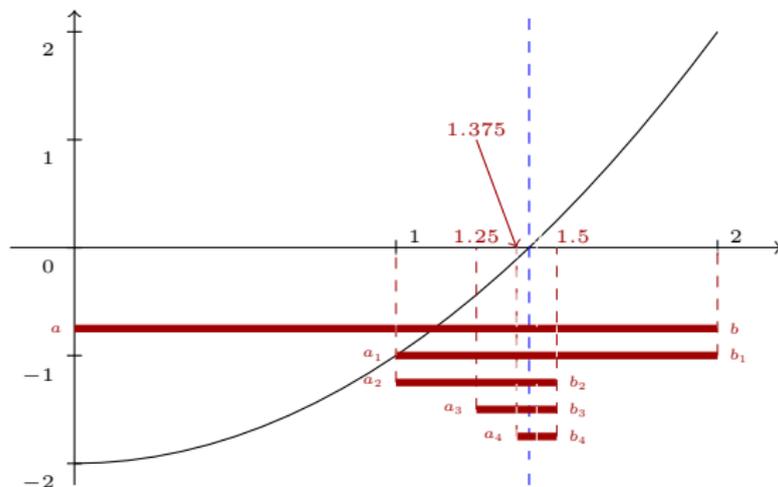
- $f(0)f(2) < 0 \rightarrow a = 0, b = 2$
- $m = 1 \rightarrow f(0)f(1) > 0 \rightarrow a = 1, b = 2$
- $m = 1.5 \rightarrow f(1)f(1.5) < 0 \rightarrow a = 1, b = 1.5$

Exemple : $x^2 - 2 = 0$ sur $[0; 2]$



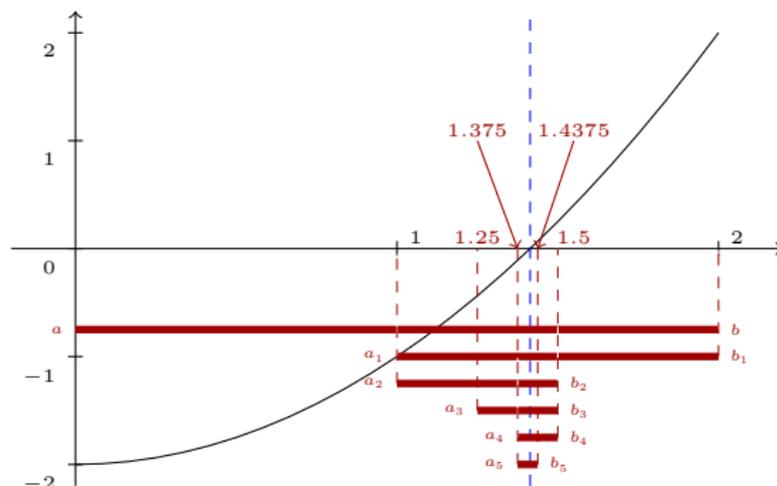
- $f(0)f(2) < 0 \rightarrow a = 0, b = 2$
- $m = 1 \rightarrow f(0)f(1) > 0 \rightarrow a = 1, b = 2$
- $m = 1.5 \rightarrow f(1)f(1.5) < 0 \rightarrow a = 1, b = 1.5$
- $m = 1.25 \rightarrow f(1)f(1.25) > 0 \rightarrow a = 1.25, b = 1.5$

Exemple : $x^2 - 2 = 0$ sur $[0; 2]$



- $f(0)f(2) < 0 \rightarrow a = 0, b = 2$
 - $m = 1 \rightarrow f(0)f(1) > 0 \rightarrow a = 1, b = 2$
 - $m = 1.5 \rightarrow f(1)f(1.5) < 0 \rightarrow a = 1, b = 1.5$
 - $m = 1.25 \rightarrow f(1)f(1.25) > 0 \rightarrow a = 1.25, b = 1.5$
- etc ...

Exemple : $x^2 - 2 = 0$ sur $[0; 2]$



- $f(0)f(2) < 0 \rightarrow a = 0, b = 2$
 - $m = 1 \rightarrow f(0)f(1) > 0 \rightarrow a = 1, b = 2$
 - $m = 1.5 \rightarrow f(1)f(1.5) < 0 \rightarrow a = 1, b = 1.5$
 - $m = 1.25 \rightarrow f(1)f(1.25) > 0 \rightarrow a = 1.25, b = 1.5$
- etc ...

Vitesse de convergence :

Si on note a_n (respectivement b_n) les valeurs des variables a (respectivement b) à l'itération n .

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$
- $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$

Vitesse de convergence :

Si on note a_n (respectivement b_n) les valeurs des variables a (respectivement b) à l'itération n .

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$
- $b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$

En prenant une valeur quelconque x_n de $[a_n, b_n]$ comme valeur approchée, on a $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |b - a|$.

On a donc un majorant de l'erreur commise.

De plus $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n$, la convergence est donc linéaire.

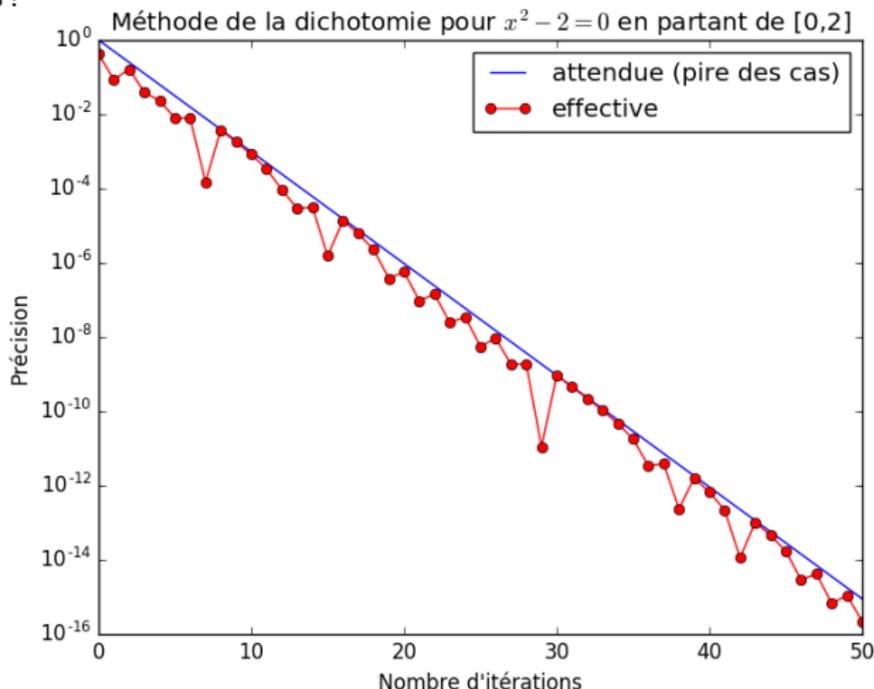
Finalement, on a donc convergence à coup sûr mais celle-ci est très lente ...

Avec d'autres hypothèses on peut obtenir une vitesse superlinéaire voir quadratique.

On peut gagner une itération en prenant pour x_n le milieu du dernier intervalle ...

On a alors $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |b - a|$.

Mais la précision effective n'augmente plus systématiquement avec le nombre d'itérations !



Méthodes itératives

Méthode du point fixe

« **Principe** » : $f(x) = 0 \iff f(x) + x = x$.

Rechercher les racines de f revient alors à rechercher les points fixes de la fonction $g: x \mapsto f(x) + x$.

« **Principe** » : $f(x) = 0 \iff f(x) + x = x$.

Rechercher les racines de f revient alors à rechercher les points fixes de la fonction $g: x \mapsto f(x) + x$.

Théorème du point fixe

Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction k -contractante (c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k < 1$).

Alors f est continue et admet un unique point fixe α sur $[a, b]$.

De plus, pour tout $x_0 \in [a, b]$ la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente vers α .

« **Principe** » : $f(x) = 0 \iff f(x) + x = x$.

Rechercher les racines de f revient alors à rechercher les points fixes de la fonction $g: x \mapsto f(x) + x$.

Théorème du point fixe

Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction k -contractante (c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k < 1$).

Alors f est continue et admet un unique point fixe α sur $[a, b]$.

De plus, pour tout $x_0 \in [a, b]$ la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente vers α .

Remarque : Si f dérivable, il suffit de borner $|f'|$ et d'utiliser le TAF. (Il suffit d'avoir $|f'| \leq k < 1$.)

« **Principe** » : $f(x) = 0 \iff f(x) + x = x$.

Rechercher les racines de f revient alors à rechercher les points fixes de la fonction $g: x \mapsto f(x) + x$.

Théorème du point fixe

Soit $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction k -contractante (c'est-à-dire k -lipschitzienne avec $k < 1$).

Alors f est continue et admet un unique point fixe α sur $[a, b]$.

De plus, pour tout $x_0 \in [a, b]$ la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ est convergente vers α .

Remarque : Si f dérivable, il suffit de borner $|f'|$ et d'utiliser le TAF. (Il suffit d'avoir $|f'| \leq k < 1$.)

Vitesse de convergence : $|x_n - \alpha| = |f(x_{n-1}) - f(\alpha)| \leq k|x_{n-1} - \alpha|$

- Par récurrence immédiate, $|x_n - \alpha| \leq k^n|x_0 - \alpha|$. On a donc un majorant de l'erreur commise et une approximation de α à ε près se fait en $O(\log \varepsilon)$ itérations (complexité).
- $\varepsilon_n \leq k\varepsilon_{n-1}$, la convergence est donc **au moins linéaire**.

Caractérisation des points dans le cas où f est \mathcal{C}^1 .

- $|f'(\alpha)| < 1$: Le point est dit **attractif**.

(Par continuité de f' , on peut trouver un intervalle I centré sur α tel que $|f'| \leq k < 1$ sur I . Donc f est k -contractante sur I .)

Caractérisation des points dans le cas où f est \mathcal{C}^1 .

- $|f'(\alpha)| < 1$: Le point est dit **attractif**.

(Par continuité de f' , on peut trouver un intervalle I centré sur α tel que $|f'| \leq k < 1$ sur I . Donc f est k -contractante sur I .)

- $f'(\alpha) = 0$: Le point est dit **super-attractif**.

Si de plus f est \mathcal{C}^2 et $|f''| \leq M$ alors on a : $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2} \varepsilon_n^2$.

La convergence est donc **quadratique**. 

Caractérisation des points dans le cas où f est \mathcal{C}^1 .

- $|f'(\alpha)| < 1$: Le point est dit **attractif**.

(Par continuité de f' , on peut trouver un intervalle I centré sur α tel que $|f'| \leq k < 1$ sur I . Donc f est k -contractante sur I .)

- $f'(\alpha) = 0$: Le point est dit **super-attractif**.

Si de plus f est \mathcal{C}^2 et $|f''| \leq M$ alors on a : $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2} \varepsilon_n^2$.

La convergence est donc **quadratique**. 

Le nombre de décimales est doublé à chaque itération. 

Caractérisation des points dans le cas où f est \mathcal{C}^1 .

- $|f'(\alpha)| < 1$: Le point est dit **attractif**.

(Par continuité de f' , on peut trouver un intervalle I centré sur α tel que $|f'| \leq k < 1$ sur I . Donc f est k -contractante sur I .)

- $f'(\alpha) = 0$: Le point est dit **super-attractif**.

Si de plus f est \mathcal{C}^2 et $|f''| \leq M$ alors on a : $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2} \varepsilon_n^2$.

La convergence est donc **quadratique**. 

Le nombre de décimales est doublé à chaque itération. 

- $|f'(\alpha)| > 1$: Le point est dit **répulsif**.

Il existe un voisinage V de α tel que sur $V \setminus \{\alpha\}$, $|f(x) - \alpha| \geq k|x - \alpha|$ avec $k > 1$.

Donc, on a divergence jusqu'à sortir de l'intervalle.

Remarque : On peut corriger en une méthode convergente si f' est de signe constant. 

Caractérisation des points dans le cas où f est \mathcal{C}^1 .

- $|f'(\alpha)| < 1$: Le point est dit **attractif**.

(Par continuité de f' , on peut trouver un intervalle I centré sur α tel que $|f'| \leq k < 1$ sur I . Donc f est k -contractante sur I .)

- $f'(\alpha) = 0$: Le point est dit **super-attractif**.

Si de plus f est \mathcal{C}^2 et $|f''| \leq M$ alors on a : $\varepsilon_{n+1} \leq \frac{M}{2} \varepsilon_n^2$.

La convergence est donc **quadratique**. 

Le nombre de décimales est doublé à chaque itération. 

- $|f'(\alpha)| > 1$: Le point est dit **répulsif**.

Il existe un voisinage V de α tel que sur $V \setminus \{\alpha\}$, $|f(x) - \alpha| \geq k|x - \alpha|$ avec $k > 1$.

Donc, on a divergence jusqu'à sortir de l'intervalle.

Remarque : On peut corriger en une méthode convergente si f' est de signe constant. 

- $|f'(\alpha)| = 1$: Le point est dit **douteux**.

① Pour $f(x) = \sin x$: Convergence mais lente. 

② Pour $f(x) = \sinh x$: Divergence. 

Exemple 1 : $(E_1) \quad x^2 = k$

(On connaît la solution de (E_1) sur \mathbb{R}^+ : $\alpha = \sqrt{k}$.)

On peut transformer (E_1) d'au moins 3 façons différentes :

① $x = \frac{k}{x} \quad f(x) = \frac{k}{x} ; \quad f'(x) = -\frac{k}{x^2}$

② $x = x^2 + x - k \quad f(x) = x^2 + x - k ; \quad f'(x) = 2x + 1$

③ $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) ; \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{x^2} \right)$

Exemple 1 : $(E_1) \quad x^2 = k$

(On connaît la solution de (E_1) sur \mathbb{R}^+ : $\alpha = \sqrt{k}$.)

On peut transformer (E_1) d'au moins 3 façons différentes :

① $x = \frac{k}{x} \quad f(x) = \frac{k}{x} ; \quad f'(x) = -\frac{k}{x^2}$

$|f'(\alpha)| = 1$: point douteux.

(Toujours divergente, périodique de période 2).

② $x = x^2 + x - k \quad f(x) = x^2 + x - k ; \quad f'(x) = 2x + 1$

③ $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) ; \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{x^2} \right)$

Exemple 1 : $(E_1) \quad x^2 = k$

(On connaît la solution de (E_1) sur \mathbb{R}^+ : $\alpha = \sqrt{k}$.)

On peut transformer (E_1) d'au moins 3 façons différentes :

① $x = \frac{k}{x} \quad f(x) = \frac{k}{x} ; \quad f'(x) = -\frac{k}{x^2}$

$|f'(\alpha)| = 1$: point douteux.

(Toujours divergente, périodique de période 2).

② $x = x^2 + x - k \quad f(x) = x^2 + x - k ; \quad f'(x) = 2x + 1$

$|f'(\alpha)| = 2\alpha + 1 > 1$: point répulsif ($k \neq 0$).

③ $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) ; \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{x^2} \right)$

Exemple 1 : $(E_1) \quad x^2 = k$

(On connaît la solution de (E_1) sur \mathbb{R}^+ : $\alpha = \sqrt{k}$.)

On peut transformer (E_1) d'au moins 3 façons différentes :

① $x = \frac{k}{x} \quad f(x) = \frac{k}{x} ; \quad f'(x) = -\frac{k}{x^2}$

$|f'(\alpha)| = 1$: point douteux.

(Toujours divergente, périodique de période 2).

② $x = x^2 + x - k \quad f(x) = x^2 + x - k ; \quad f'(x) = 2x + 1$

$|f'(\alpha)| = 2\alpha + 1 > 1$: point répulsif ($k \neq 0$).

③ $x = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) \quad f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{k}{x} \right) ; \quad f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{k}{x^2} \right)$

$|f'(\alpha)| = 0$: point super-attractif. (Méthode de Héron).

Exemple 2 : $(E_2) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$

(On connaît les deux solutions de (E) : -1 et 3 .)

On peut transformer (E) d'au moins 4 façons différentes :

① $x = x^2 - x - 3 \rightarrow g_0(x) = x^2 - x - 3$

② $x = \sqrt{2x + 3} \rightarrow g_1(x) = \sqrt{2x + 3}$ (en isolant x^2)

③ $x = \frac{3}{x - 2} \rightarrow g_2(x) = \frac{3}{x - 2}$ (en écrivant $x(x - 2) - 3 = 0$)

④ $x = \frac{x^2 - 3}{2} \rightarrow g_3(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$ (en isolant x)

Exemple 2 : $(E_2) \quad x^2 - 2x - 3 = 0$

(On connaît les deux solutions de (E) : -1 et 3 .)

On peut transformer (E) d'au moins 4 façons différentes :

① $x = x^2 - x - 3 \rightarrow g_0(x) = x^2 - x - 3$

② $x = \sqrt{2x + 3} \rightarrow g_1(x) = \sqrt{2x + 3}$ (en isolant x^2)

③ $x = \frac{3}{x - 2} \rightarrow g_2(x) = \frac{3}{x - 2}$ (en écrivant $x(x - 2) - 3 = 0$)

④ $x = \frac{x^2 - 3}{2} \rightarrow g_3(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$ (en isolant x)

Résultats obtenus à 10^{-3} près avec $x_0 = 4$:

| | Valeur à 10^{-3} près | Nombre d'itérations |
|------------|-------------------------|---------------------|
| Avec g_0 | nan/inf | (11) |
| Avec g_1 | 3,000 | 7 |
| Avec g_2 | -1,000 | 11 |
| Avec g_3 | inf | (12) |

Exemple 2 : (E_2) $x^2 - 2x - 3 = 0$

① $x = x^2 - x - 3 \rightarrow g_0(x) = x^2 - x - 3$

② $x = \sqrt{2x + 3} \rightarrow g_1(x) = \sqrt{2x + 3}$

③ $x = \frac{3}{x - 2} \rightarrow g_2(x) = \frac{3}{x - 2}$

④ $x = \frac{x^2 - 3}{2} \rightarrow g_3(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$

• Analyse :

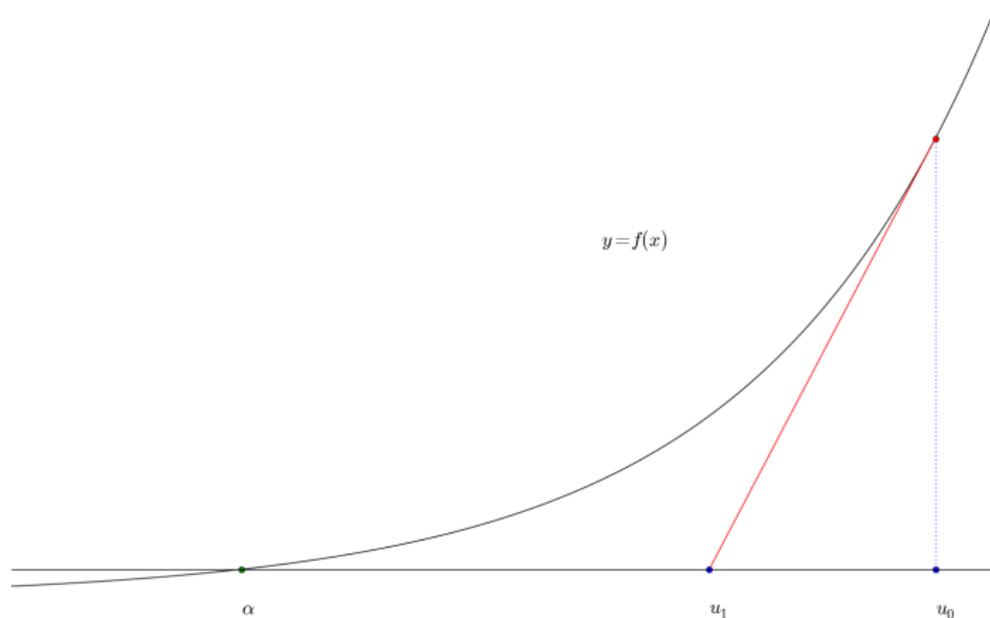
Racines

| | | $r = 3$ | $r = -1$ | Résultat |
|-----------------------------------|-------------|-------------------|-------------------|------------------|
| $g'_0(x) = 2x - 1$ | $ g'_0(r) $ | $5 > 1$ | $3 > 1$ | inf |
| $g'_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ | $ g'_1(r) $ | $\frac{1}{3} < 1$ | 1 | $\approx 3,000$ |
| $g'_2(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$ | $ g'_2(r) $ | $3 > 1$ | $\frac{1}{3} < 1$ | $\approx -1,000$ |
| $g'_3(x) = x$ | $ g'_3(r) $ | $3 > 1$ | 1 | inf |

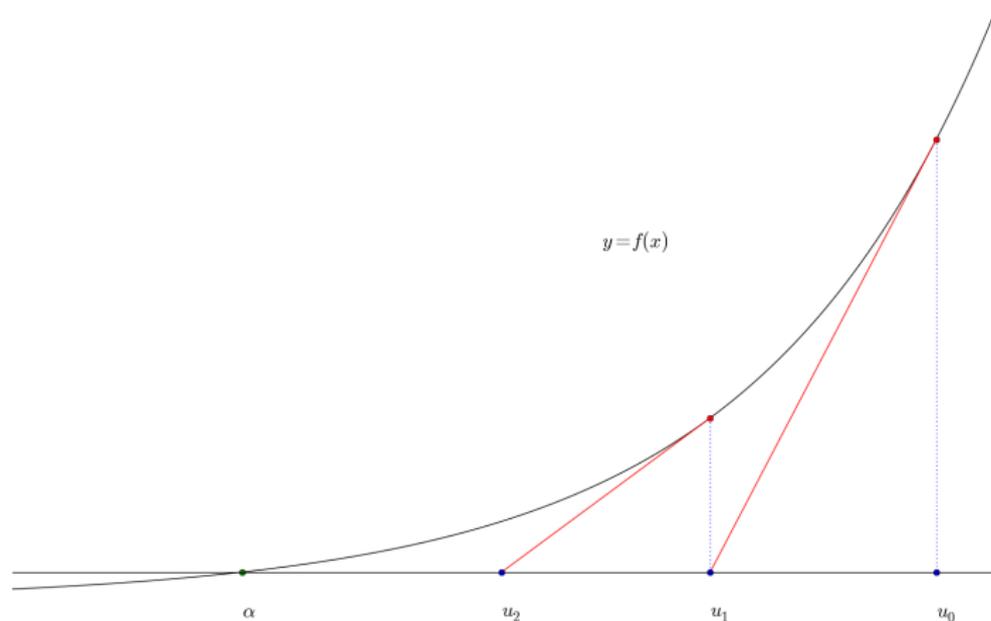
Méthodes itératives

Méthode de Newton

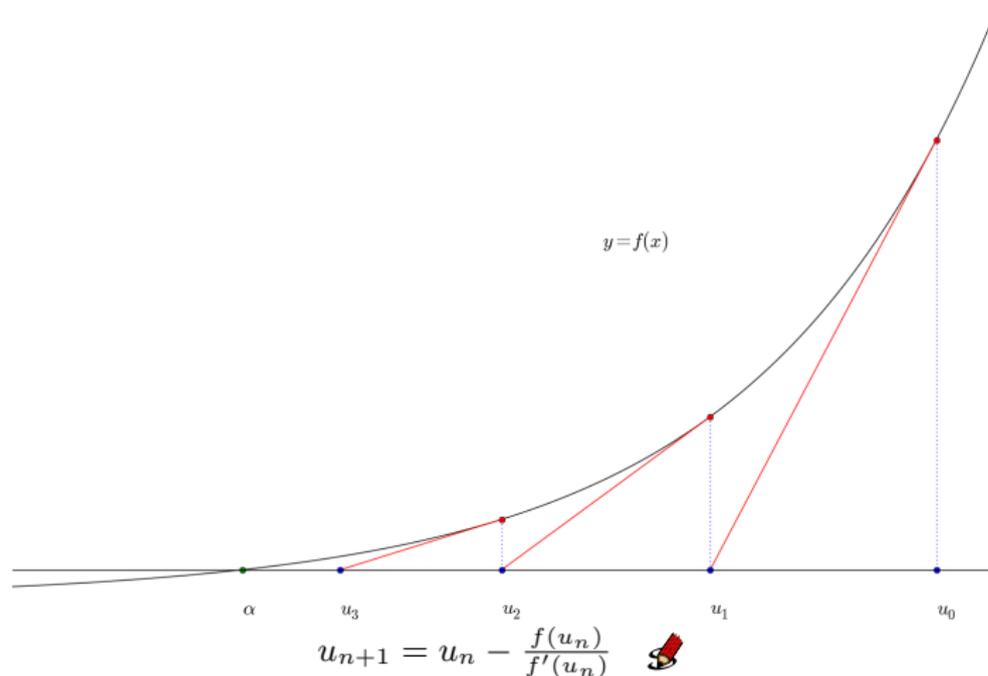
On part de u_0 , on trace la tangente T_0 à la courbe au point d'abscisse u_0 . T_0 coupe l'axe des abscisses en u_1



On trace la tangente T_1 à la courbe au point d'abscisse u_1 . T_1 coupe l'axe des abscisses en u_2



On trace la tangente T_2 à la courbe au point d'abscisse u_2 . T_2 coupe l'axe des abscisses en u_3 , etc ...



$\alpha \in [a; b]$ solution de $f(x) = 0$

$\alpha \in [a; b]$ solution de $f(x) = 0$

\hookrightarrow **Première approximation** : $u_0 \in [a; b]$

$\alpha = u_0 + h_0$ où h_0 est l'erreur d'approximation commise.

$\alpha \in [a; b]$ solution de $f(x) = 0$

↔ **Première approximation** : $u_0 \in [a; b]$

$\alpha = u_0 + h_0$ où h_0 est l'erreur d'approximation commise.

Sous réserve que f soit dérivable et que f' ne s'annule pas :

- $f(u_0 + h_0) = f(u_0) + h_0 \times f'(u_0) + o(h_0)$ (Taylor-Young)
- On en déduit une valeur approchée de h_0 : $h_0 \approx -\frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$

$\alpha \in [a; b]$ solution de $f(x) = 0$

↪ **Première approximation** : $u_0 \in [a; b]$

$\alpha = u_0 + h_0$ où h_0 est l'erreur d'approximation commise.

Sous réserve que f soit dérivable et que f' ne s'annule pas :

- $f(u_0 + h_0) = f(u_0) + h_0 \times f'(u_0) + o(h_0)$ (Taylor-Young)
- On en déduit une valeur approchée de h_0 : $h_0 \approx -\frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$

On peut ainsi obtenir une nouvelle approximation de α qui sera notée u_1 avec

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

$\alpha \in [a; b]$ solution de $f(x) = 0$

↪ **Première approximation** : $u_0 \in [a; b]$
 $\alpha = u_0 + h_0$ où h_0 est l'erreur d'approximation commise.

Sous réserve que f soit dérivable et que f' ne s'annule pas :

- $f(u_0 + h_0) = f(u_0) + h_0 \times f'(u_0) + o(h_0)$ (Taylor-Young)
- On en déduit une valeur approchée de h_0 : $h_0 \approx -\frac{f(u_0)}{f'(u_0)}$

On peut ainsi obtenir une nouvelle approximation de α qui sera notée u_1 avec

$$u_1 = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)}.$$

↪ **Deuxième approximation** : u_1 .
On a $\alpha = u_1 + h_1, \dots$

Suite des itérés de Newton :

$$u_0 \in [a; b] \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

Suite des itérés de Newton : $u_0 \in [a; b]$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Théorème

Si f est de classe \mathcal{C}^2 et α racine simple de f (i.e. $f'(\alpha) \neq 0$) alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite des itérés de Newton converge vers α avec une vitesse quadratique pour tout $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

Suite des itérés de Newton : $u_0 \in [a; b]$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Théorème

Si f est de classe \mathcal{C}^2 et α racine simple de f (i.e. $f'(\alpha) \neq 0$) alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite des itérés de Newton converge vers α avec une vitesse quadratique pour tout $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

- Lien avec la méthode du point fixe :
→ Point super-attractif. 

Suite des itérés de Newton : $u_0 \in [a; b]$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Théorème

Si f est de classe \mathcal{C}^2 et α racine simple de f (i.e. $f'(\alpha) \neq 0$) alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite des itérés de Newton converge vers α avec une vitesse quadratique pour tout $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

- Lien avec la méthode du point fixe :
→ Point super-attractif. 
- Pour $x^2 - k = 0$: méthode de Newton = méthode de Héron.

Suite des itérés de Newton : $u_0 \in [a; b]$ et $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Théorème

Si f est de classe \mathcal{C}^2 et α racine simple de f (i.e. $f'(\alpha) \neq 0$) alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite des itérés de Newton converge vers α avec une vitesse quadratique pour tout $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

- Lien avec la méthode du point fixe :
→ Point super-attractif. 
- Pour $x^2 - k = 0$: méthode de Newton = méthode de Héron.
-  Vitesse de convergence atteinte seulement si l'on est proche de la solution (approximation du DL correcte), sinon elle peut être linéaire.

Suite des itérés de Newton :

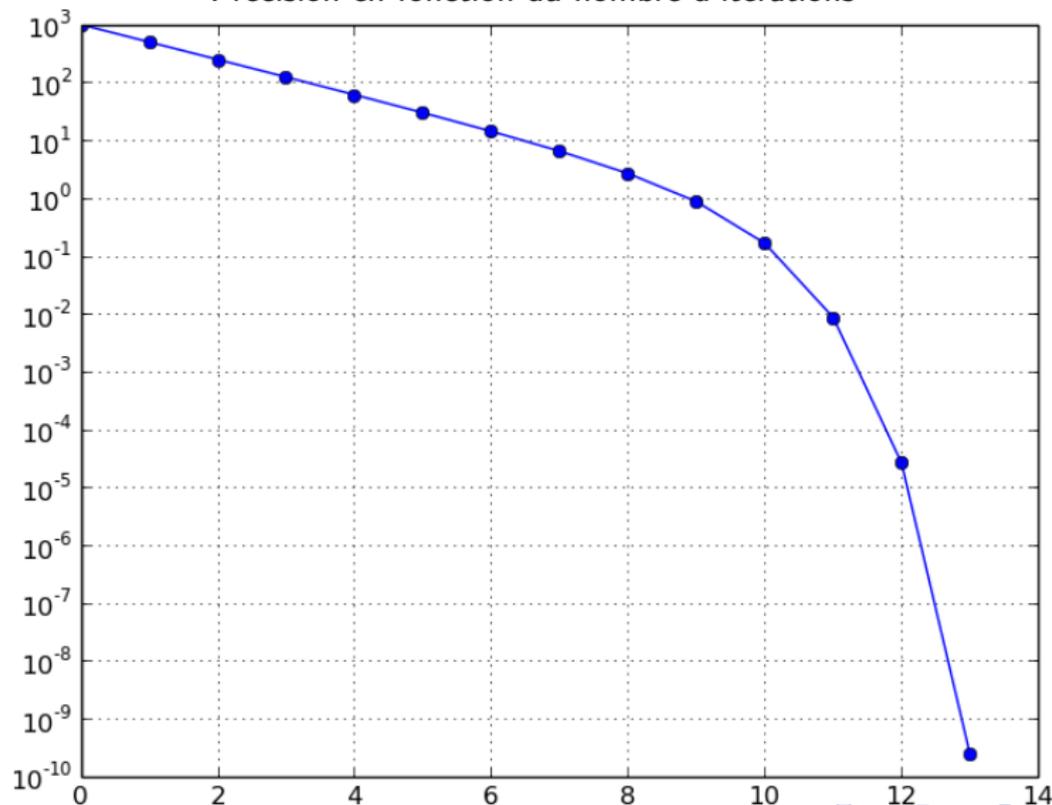
$$u_0 \in [a; b] \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

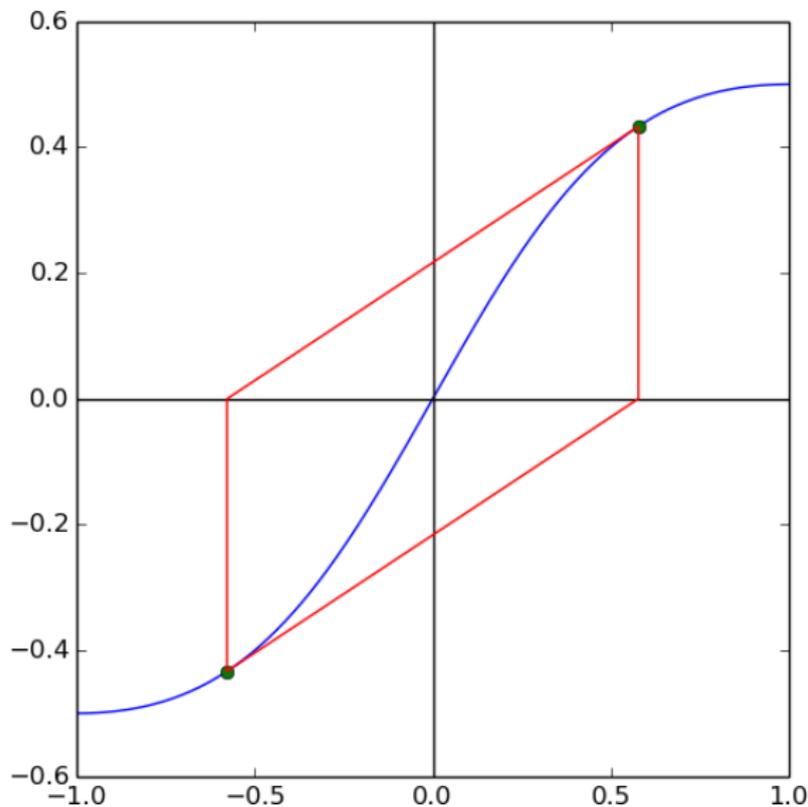
Théorème

Si f est de classe \mathcal{C}^2 et α racine simple de f (i.e. $f'(\alpha) \neq 0$) alors il existe $\delta > 0$ tel que la suite des itérés de Newton converge vers α avec une vitesse quadratique pour tout $u_0 \in [\alpha - \delta, \alpha + \delta]$

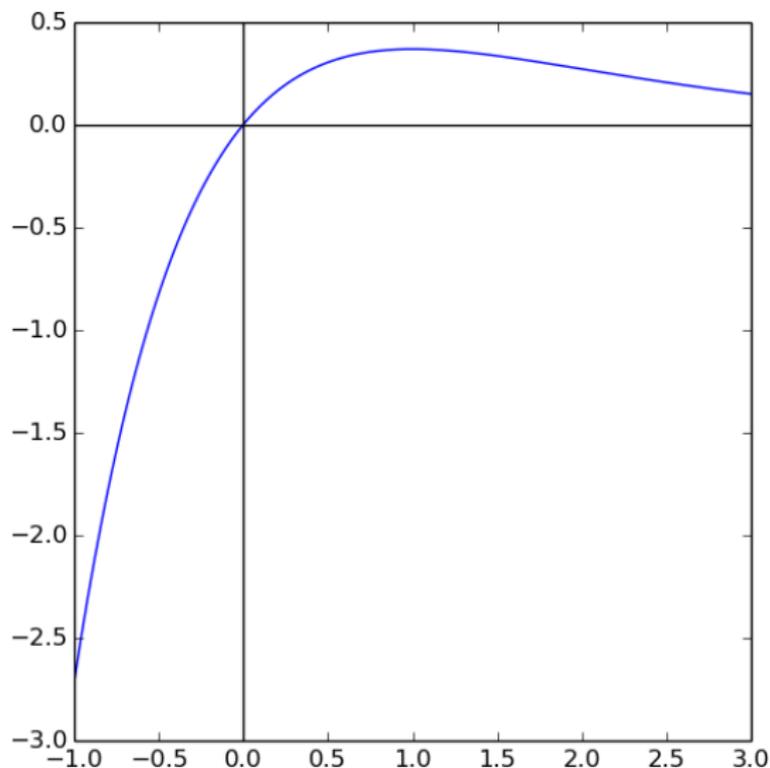
- Lien avec la méthode du point fixe :
 → Point super-attractif. 
- Pour $x^2 - k = 0$: méthode de Newton = méthode de Héron.
-  Vitesse de convergence atteinte seulement si l'on est proche de la solution (approximation du DL correcte), sinon elle peut être linéaire.
- Problèmes de convergence si les termes plus élevés dans le développement de Taylor non négligeables (par exemple $f'(\alpha) = 0$).
 + Cas pathologiques.
 Pour éviter cela, on peut combiner Newton et le cloisonnement des racines pour vérifier que la méthode reste dans des intervalles bornés.

Précision en fonction du nombre d'itérations





Diverge lentement mais sûrement ...



Méthodes itératives

Méthode de la Sécante

On fait l'hypothèse que f est presque linéaire autour de sa racine.

Principe :

u_{n-1} et u_n cloisonnent la racine α

On trace alors le segment relatif à u_{n-1} et u_n et l'intersection avec l'axe des abscisses donne u_{n+1} .

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$$

On fait l'hypothèse que f est presque linéaire autour de sa racine.

Principe :

u_{n-1} et u_n cloisonnent la racine α

On trace alors le segment relatif à u_{n-1} et u_n et l'intersection avec l'axe des abscisses donne u_{n+1} .

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$$

Remarque : La nouvelle valeur ne cloisonne pas forcément la racine, donc la méthode peut ne pas converger ... Mais si elle converge, la convergence est superlinéaire.

On fait l'hypothèse que f est presque linéaire autour de sa racine.

Principe :

u_{n-1} et u_n cloisonnent la racine α

On trace alors le segment relatif à u_{n-1} et u_n et l'intersection avec l'axe des abscisses donne u_{n+1} .

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n - u_{n-1}}{f(u_n) - f(u_{n-1})} f(u_n)$$

Remarque : La nouvelle valeur ne cloisonne pas forcément la racine, donc la méthode peut ne pas converger ... Mais si elle converge, la convergence est superlinéaire.

Théorème 

Si f est \mathcal{C}^2 autour de sa racine et la méthode converge, alors $\varepsilon_{n+1} \approx C(\varepsilon_n)^\omega$ où $\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Remarques :

- Similaire à Newton : Utilisée en particulier quand on ne connaît pas f' (méthode des différences finies \rightarrow méthode de la sécante).

Remarques :

- Similaire à Newton : Utilisée en particulier quand on ne connaît pas f' (méthode des différences finies \rightarrow méthode de la sécante).
- Le calcul de $\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ peut poser problème si a et b trop proches.
Une solution possible : dès que le calcul des pentes mène à des erreurs d'approximation, on stoppe et on garde la dernière pente calculée.

Remarques :

- Similaire à Newton : Utilisée en particulier quand on ne connaît pas f' (méthode des différences finies \rightarrow méthode de la sécante).
- Le calcul de $\frac{b-a}{f(b)-f(a)}$ peut poser problème si a et b trop proches.
Une solution possible : dès que le calcul des pentes mène à des erreurs d'approximation, on stoppe et on garde la dernière pente calculée.
- Une autre méthode : même idée mais on approche f avec un polynôme de degré 2 (nécessite 3 points au lieu de 2)
 \rightarrow méthode de Brent.

Méthodes itératives

Méthode de la Fausse position

Principe :

- On reprend la méthode de la bisection mais pas avec le point milieu de l'intervalle.
- À la place du milieu, on prend le point trouvé avec la sécante.
- La racine reste cloisonnée ... Mais la méthode peut redevenir linéaire.

Méthodes itératives

En dimension >1

La généralisation des méthodes de la bisection ou de la sécante est difficilement envisageable (en tout cas, sans de très gros changements).

Par contre la méthode de Newton se prête bien à la généralisation. On parle alors de la méthode de Newton–Raphson.

Cadre :

$F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. On cherche à résoudre $F(X) = 0$.

Si la fonction est \mathcal{C}^1 alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$f_k(X + \delta X) = f_k(X) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(X) \delta x_i + o(\delta X)$$

où $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f_i: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Matrice jacobienne : $J(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) \right)$

Taylor : $F(X + \delta X) = F(X) + J(X) \cdot \delta X + o(\delta X)$

Méthode de Newton–Raphson

Principe :

- À partir d'un X de départ on cherche δX tel que $X + \delta X$ soit racine, c'est-à-dire : $F(X + \delta X) = 0$.
(δX est l'erreur commise dans l'approximation de la racine par X .)

Méthode de Newton–Raphson

Principe :

- À partir d'un X de départ on cherche δX tel que $X + \delta X$ soit racine, c'est-à-dire : $F(X + \delta X) = 0$.
(δX est l'erreur commise dans l'approximation de la racine par X .)
- Comme $F(X + \delta X) = F(X) + J(X).\delta X + o(\delta X)$, en négligeant $o(\delta X)$, on trouve une approximation de δX qui est solution de : $J(X).\delta X = -F(X)$.

Méthode de Newton–Raphson

Principe :

- À partir d'un X de départ on cherche δX tel que $X + \delta X$ soit racine, c'est-à-dire : $F(X + \delta X) = 0$.
(δX est l'erreur commise dans l'approximation de la racine par X .)
- Comme $F(X + \delta X) = F(X) + J(X).\delta X + o(\delta X)$, en négligeant $o(\delta X)$, on trouve une approximation de δX qui est solution de : $J(X).\delta X = -F(X)$.
- On obtient alors une nouvelle approximation de la solution avec $X + \delta X$.
- On itère donc le procédé (après l'affectation $X \leftarrow X + \delta X$).

Méthode de Newton–Raphson

Principe :

- À partir d'un X de départ on cherche δX tel que $X + \delta X$ soit racine, c'est-à-dire : $F(X + \delta X) = 0$.
(δX est l'erreur commise dans l'approximation de la racine par X .)
- Comme $F(X + \delta X) = F(X) + J(X).\delta X + o(\delta X)$, en négligeant $o(\delta X)$, on trouve une approximation de δX qui est solution de : $J(X).\delta X = -F(X)$.
- On obtient alors une nouvelle approximation de la solution avec $X + \delta X$.
- On itère donc le procédé (après l'affectation $X \leftarrow X + \delta X$).

Remarque : Les problèmes sont les mêmes qu'en dimension 1.

Méthode de Newton–Raphson

Principe :

- À partir d'un X de départ on cherche δX tel que $X + \delta X$ soit racine, c'est-à-dire : $F(X + \delta X) = 0$.
(δX est l'erreur commise dans l'approximation de la racine par X .)
- Comme $F(X + \delta X) = F(X) + J(X).\delta X + o(\delta X)$, en négligeant $o(\delta X)$, on trouve une approximation de δX qui est solution de : $J(X).\delta X = -F(X)$.
- On obtient alors une nouvelle approximation de la solution avec $X + \delta X$.
- On itère donc le procédé (après l'affectation $X \leftarrow X + \delta X$).

Remarque : Les problèmes sont les mêmes qu'en dimension 1.

Backtracking (Pour contrecarrer les sauts possibles dans l'algorithme de Newton–Raphson)

$$\Phi: X \mapsto {}^t F(X).F(X) = \|F(X)\|^2$$

La direction de Newton est une direction descendante pour φ . 

En pratique, on teste un pas entier $X + 1.\delta X$ et on vérifie que Φ diminue, sinon on réduit le pas (d'un facteur arbitraire) jusqu'à ce que ce soit le cas.

Racines de polynômes

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.
- La recherche de **toutes** les racines est un problème mal conditionné.

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.
- La recherche de **toutes** les racines est un problème mal conditionné.

▶ Exemple 1 : $P(X) = \prod_{i=1}^{12} (X + i)$.

Le polynôme $P(X) + \frac{1}{10^{14}} X^{11}$ ne possède **que 6 racines réelles**.

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.
- La recherche de **toutes** les racines est un problème mal conditionné.

▶ Exemple 1 : $P(X) = \prod_{i=1}^{12} (X + i)$.

Le polynôme $P(X) + \frac{1}{10^{14}} X^{11}$ ne possède **que 6 racines réelles**.

▶ Exemple 2 : $R(X) = (X - 1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

Pour une variation de l'un des coefficient de l'ordre de 10^{-3} , la variation des racines (en norme) est de 17% à 31%

Il faut donc être « sûr » des coefficients.

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.
- La recherche de **toutes** les racines est un problème mal conditionné.

▶ Exemple 1 : $P(X) = \prod_{i=1}^{12} (X + i)$.

Le polynôme $P(X) + \frac{1}{10^{14}} X^{11}$ ne possède **que 6 racines réelles**.

▶ Exemple 2 : $R(X) = (X - 1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

Pour une variation de l'un des coefficient de l'ordre de 10^{-3} , la variation des racines (en norme) est de 17% à 31%

Il faut donc être « sûr » des coefficients.

▶ Solutions exactes ?

- ★ Degré 2 : Avec le discriminant
- ★ Degré 3 : Formules de Cardan
- ★ Degré 4 : Formules de Ferrari
- ★ Degré supérieur ou égal à 5 :

Théorème d'Abel (Théorie de Gallois) : Il existe des polynômes de degré 5 et plus qu'il n'est pas possible de résoudre par radicaux.

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.
- La recherche de **toutes** les racines est un problème mal conditionné.

▶ Exemple 1 : $P(X) = \prod_{i=1}^{12} (X + i)$.

Le polynôme $P(X) + \frac{1}{10^{14}} X^{11}$ ne possède **que 6 racines réelles**.

▶ Exemple 2 : $R(X) = (X - 1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

Pour une variation de l'un des coefficient de l'ordre de 10^{-3} , la variation des racines (en norme) est de 17% à 31%

Il faut donc être « sûr » des coefficients.

- ▶ Solutions exactes ?

- ★ Degré 2 : Avec le discriminant
- ★ Degré 3 : Formules de Cardan
- ★ Degré 4 : Formules de Ferrari
- ★ Degré supérieur ou égal à 5 :

Théorème d'Abel (Théorie de Galois) : Il existe des polynômes de degré 5 et plus qu'il n'est pas possible de résoudre par radicaux.

- Approche du problème en 2 étapes :

- ▶ « Encadrement » des racines
- ▶ Recherche d'une ou plusieurs racines à partir d'une valeur proche ou d'un encadrement

- Pour la recherche d'une racine, on peut utiliser la plupart des méthodes précédentes.
- La recherche de **toutes** les racines est un problème mal conditionné.

▶ Exemple 1 : $P(X) = \prod_{i=1}^{12} (X + i)$.

Le polynôme $P(X) + \frac{1}{10^{14}} X^{11}$ ne possède **que 6 racines réelles**.

▶ Exemple 2 : $R(X) = (X - 1)^4 = X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$.

Pour une variation de l'un des coefficient de l'ordre de 10^{-3} , la variation des racines (en norme) est de 17% à 31%

Il faut donc être « sûr » des coefficients.

- ▶ Solutions exactes ?

★ Degré 2 : Avec le discriminant

★ Degré 3 : Formules de Cardan

★ Degré 4 : Formules de Ferrari

★ Degré supérieur ou égal à 5 :

Théorème d'Abel (Théorie de Galois) : Il existe des polynômes de degré 5 et plus qu'il n'est pas possible de résoudre par radicaux.

- Approche du problème en 2 étapes :

▶ « Encadrement » des racines

▶ Recherche d'une ou plusieurs racines à partir d'une valeur proche ou d'un encadrement

- Pour les racines multiples, on peut utiliser $P/(P \wedge P')$.

Pose tout de même un problème pour les coefficients de type flottant (précision \rightarrow erreurs \rightarrow instabilité).

Racines de polynômes

Majoration des racines

Proposition 

Soit $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ avec $a_n = 1$.

- $\mu_1 = \max \left(1; \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right)$
- $\mu_2 = |a_0| + \sum_{i=0}^{n-1} |a_{i+1} - a_i| + |a_n|$
- $\mu_3 = 1 + \max_{i=0}^{n-1} |a_i|$

Alors pour tout x tel que $P(x) = 0$:

$$|x| \leq \min(\mu_1; \mu_2; \mu_3)$$

Racines de polynômes

Localisation des racines

Suites de Sturm

(Bien adapté si les coefficients sont rationnels, car alors les calculs sont exacts.)

Pour P polynôme de degré n , on définit la suite (P_n) par :

$$P_0(x) = P(x) ; P_1(x) = P'(x) \text{ et } P_{k+1} \equiv -P_{k-1}[P_k]$$

Si P admet uniquement des racines distinctes, le nombre de racines de P dans $[a, b]$ est $\sigma_a - \sigma_b$ où σ_x est le nombre de changements de signe dans $(P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x))$.

↪ Permet de localiser les racines avec une dichotomie

↪  Erreurs d'approximations pour coefficients dans \mathbb{R}

Racines de polynômes

Méthode générale - Technique de déflation

On recherche une racine α , puis après une division (par $(X - \alpha)$) on recommence sur un polynôme de degré moindre.

On recherche une racine α , puis après une division (par $(X - \alpha)$) on recommence sur un polynôme de degré moindre.



Propagation des erreurs : très sensible à cause des divisions successives.

On recherche une racine α , puis après une division (par $(X - \alpha)$) on recommence sur un polynôme de degré moindre.



Propagation des erreurs : très sensible à cause des divisions successives.

Pour améliorer la stabilité :

- Forward method : division suivant les puissances décroissantes : pour la racine de plus grand module
- Backward method : division suivant les puissances croissantes : pour la racine de plus petit module

On recherche une racine α , puis après une division (par $(X - \alpha)$) on recommence sur un polynôme de degré moindre.

 Propagation des erreurs : très sensible à cause des divisions successives.

Pour améliorer la stabilité :

- Forward method : division suivant les puissances décroissantes : pour la racine de plus grand module
- Backward method : division suivant les puissances croissantes : pour la racine de plus petit module

Pour information, d'autres méthodes :

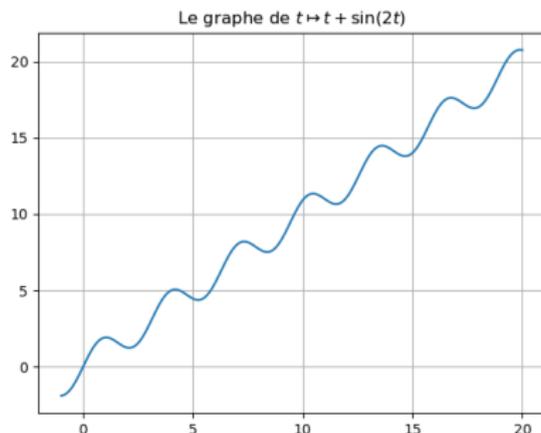
- Muller/Laguerre
- Bairstow (voir TP)
- Graeffe

Extremum local

En général :

- problème plus difficile que le calcul de racines
- impossible de savoir si l'extremum local est global

Exemple : $x \mapsto x + \sin(2x)$



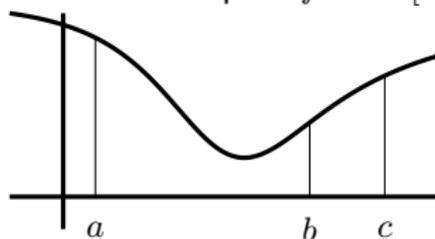
- **Précision** : Il ne faut pas espérer avoir mieux que $\sqrt{\varepsilon}$  (où ε = précision machine)
- **Principe** : À partir d'un point, on suit les pentes descendantes (ou ascendantes).

Extremum local

Fonctions réelles

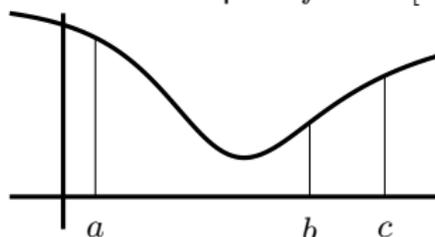
Méthode de la « section dorée » (ou « golden section method »)**Principe** (pour un minimum) :

On cloisonne le minimum par 3 valeurs a, b, c telles que $a < b < c$, $f(a) > f(b)$ et $f(c) > f(b)$. (Donc il existe un minimum pour f dans $[a, c]$.)



Méthode de la « section dorée » (ou « golden section method »)**Principe** (pour un minimum) :

On cloisonne le minimum par 3 valeurs a, b, c telles que $a < b < c$, $f(a) > f(b)$ et $f(c) > f(b)$. (Donc il existe un minimum pour f dans $[a, c]$.)

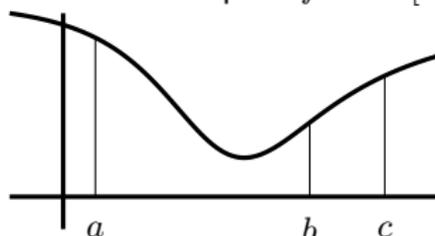


Les 3 premiers points fixés, on choisit un quatrième point x dans l'intervalle et on garde les 3 valeurs qui permettent de cloisonner le minimum.

Méthode de la « section dorée » (ou « golden section method »)

Principe (pour un minimum) :

On cloisonne le minimum par 3 valeurs a, b, c telles que $a < b < c$, $f(a) > f(b)$ et $f(c) > f(b)$. (Donc il existe un minimum pour f dans $[a, c]$.)



Les 3 premiers points fixés, on choisit un quatrième point x dans l'intervalle et on garde les 3 valeurs qui permettent de cloisonner le minimum.

Par exemple :

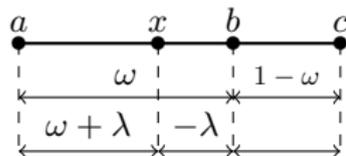
- si $x \in [b, c]$
 - ▶ $f(x) \geq f(b) \rightarrow (a, b, x)$
 - ▶ $f(x) < f(b) \rightarrow (b, x, c)$
- si $x \in [a, b]$
 - ▶ $f(x) \geq f(b) \rightarrow (x, b, c)$
 - ▶ $f(x) < f(b) \rightarrow (a, x, b)$

Choix de x ?

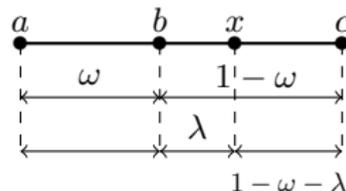
Soit $\omega = \frac{b-a}{c-a}$ et $\lambda = \frac{x-b}{c-a}$

Deux cas possibles :

$x \in [a, b]$



$x \in [b, c]$

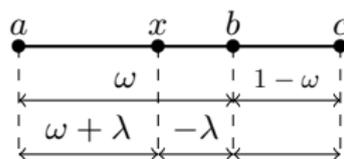


Choix de x ?

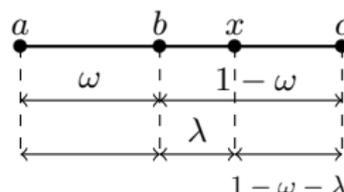
Soit $\omega = \frac{b-a}{c-a}$ et $\lambda = \frac{x-b}{c-a}$

Deux cas possibles :

$x \in [a, b]$



$x \in [b, c]$



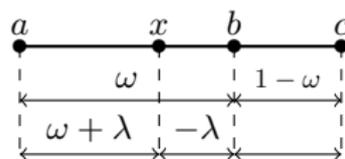
- **1^{er} cas** : $x \in [a, b]$. La taille du nouvel intervalle sera soit de $1 - \omega - \lambda$, soit de ω . Pour un choix indépendant du côté il faut $1 - \omega - \lambda = \omega$ soit $\lambda = 1 - 2\omega$.

Choix de x ?

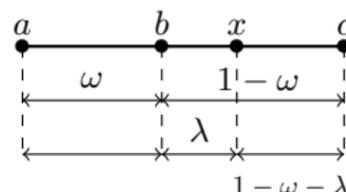
Soit $\omega = \frac{b-a}{c-a}$ et $\lambda = \frac{x-b}{c-a}$

Deux cas possibles :

$x \in [a, b]$



$x \in [b, c]$

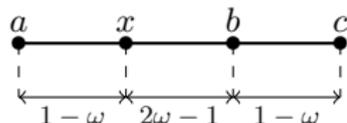


- **1^{er} cas** : $x \in [a, b]$. La taille du nouvel intervalle sera soit de $1 - \omega - \lambda$, soit de ω . Pour un choix indépendant du côté il faut $1 - \omega - \lambda = \omega$ soit $\lambda = 1 - 2\omega$.
- **2^{ème} cas** : $x \in [b, c]$. La taille du nouvel intervalle sera soit de $\omega + \lambda$, soit de $1 - \omega$. Pour un choix indépendant du côté il faut $\omega + \lambda = 1 - \omega$ soit $\lambda = 1 - 2\omega$.

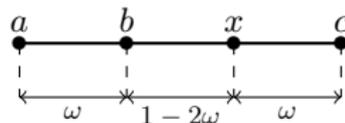
La stratégie globale est donc de prendre $\lambda = 1 - 2\omega$.

On obtient donc :

$$x \in [a, b]$$



$$x \in [a, b]$$

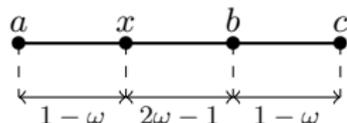


x est le symétrique de b par rapport au milieu de $[a, c]$.

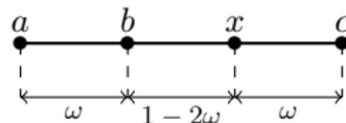
La stratégie globale est donc de prendre $\lambda = 1 - 2\omega$.

On obtient donc :

$$x \in [a, b]$$



$$x \in [a, b]$$



x est le symétrique de b par rapport au milieu de $[a, c]$.

Réduction :

- ω si $\omega > \frac{1}{2}$
- $1 - \omega$ si $\omega < \frac{1}{2}$

Donc réduction qui sera au mieux celle de la dichotomie.

Passage à la récurrence

À un triplet (a, b, c) on associe le facteur ω comme précédemment.

Ainsi $[a, c]$ est partitionné en $(\omega, 1 - \omega)$.

Après une itération la partition devient

$$\left(\frac{1 - \omega}{\omega}; \frac{2\omega - 1}{\omega} \right) \text{ ou } \left(\frac{\omega}{1 - \omega}; \frac{1 - 2\omega}{1 - \omega} \right)$$

(ou les couples symétriques)

Passage à la récurrence

À un triplet (a, b, c) on associe le facteur ω comme précédemment.

Ainsi $[a, c]$ est partitionné en $(\omega, 1 - \omega)$.

Après une itération la partition devient

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega}; \frac{2\omega-1}{\omega}\right) \text{ ou } \left(\frac{\omega}{1-\omega}; \frac{1-2\omega}{1-\omega}\right)$$

(ou les couples symétriques)

Si on veut une symétrie d'échelle, c'est-à-dire que les partitions correspondent au même rapport, alors :

- $\omega(1 - \omega) = \frac{\omega}{1-\omega} \times \frac{1-2\omega}{1-\omega}$.

Passage à la récurrence

À un triplet (a, b, c) on associe le facteur ω comme précédemment.

Ainsi $[a, c]$ est partitionné en $(\omega, 1 - \omega)$.

Après une itération la partition devient

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega}; \frac{2\omega-1}{\omega}\right) \text{ ou } \left(\frac{\omega}{1-\omega}; \frac{1-2\omega}{1-\omega}\right)$$

(ou les couples symétriques)

Si on veut une symétrie d'échelle, c'est-à-dire que les partitions correspondent au même rapport, alors :

- $\omega(1-\omega) = \frac{\omega}{1-\omega} \times \frac{1-2\omega}{1-\omega}$.

OU

- $\omega(1-\omega) = \frac{1-\omega}{\omega} \times \frac{2\omega-1}{\omega}$.

Passage à la récurrence

À un triplet (a, b, c) on associe le facteur ω comme précédemment.

Ainsi $[a, c]$ est partitionné en $(\omega, 1 - \omega)$.

Après une itération la partition devient

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega}; \frac{2\omega-1}{\omega}\right) \text{ ou } \left(\frac{\omega}{1-\omega}; \frac{1-2\omega}{1-\omega}\right)$$

(ou les couples symétriques)

Si on veut une symétrie d'échelle, c'est-à-dire que les partitions correspondent au même rapport, alors :

- $\omega(1-\omega) = \frac{\omega}{1-\omega} \times \frac{1-2\omega}{1-\omega}$. D'où $(1-\omega)^3 + 2\omega - 1 = 0$.
Donc $\omega^3 - 3\omega^2 + \omega = 0$ ou encore $\omega(\omega^2 - 3\omega + 1) = 0$
Or $\omega \neq 0$, donc $\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$. Donc $\omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ car $\omega \in]0, 1[$

OU

- $\omega(1-\omega) = \frac{1-\omega}{\omega} \times \frac{2\omega-1}{\omega}$.

Passage à la récurrence

À un triplet (a, b, c) on associe le facteur ω comme précédemment.

Ainsi $[a, c]$ est partitionné en $(\omega, 1 - \omega)$.

Après une itération la partition devient

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega}; \frac{2\omega-1}{\omega}\right) \text{ ou } \left(\frac{\omega}{1-\omega}; \frac{1-2\omega}{1-\omega}\right)$$

(ou les couples symétriques)

Si on veut une symétrie d'échelle, c'est-à-dire que les partitions correspondent au même rapport, alors :

- $\omega(1-\omega) = \frac{\omega}{1-\omega} \times \frac{1-2\omega}{1-\omega}$. D'où $(1-\omega)^3 + 2\omega - 1 = 0$.
 Donc $\omega^3 - 3\omega^2 + \omega = 0$ ou encore $\omega(\omega^2 - 3\omega + 1) = 0$
 Or $\omega \neq 0$, donc $\omega^2 - 3\omega + 1 = 0$. Donc $\omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ car $\omega \in]0, 1[$

OU

- $\omega(1-\omega) = \frac{1-\omega}{\omega} \times \frac{2\omega-1}{\omega}$. D'où $\omega^3 - 2\omega + 1 = 0$.
 En posant $x = 1 - \omega$, on obtient $x^3 - 3x^2 + x = 0$.
 $x \in]0, 1[$, on se ramène donc au cas ci-dessus.
 Donc $1 - \omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, c'est-à-dire $\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,618$ et $\omega = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,382$ sont symétriques par rapport au milieu.

Stratégie :

En partant de (a, b, c) cloisonnant le minimum, le point suivant est choisi dans le plus grand intervalle $[a, b]$ ou $[b, c]$ en respectant la fraction $\omega \approx 0,618$ (ou $1 - \omega$).

Ensuite on itère le procédé en prenant à chaque étape le symétrique de b par rapport au milieu de $[a, c]$ comme nouveau point.

À chaque étape, on a un facteur $\approx 0,618$ sur la largeur de l'intervalle.

→ Convergence linéaire un peu moins bonne que dans le cas de la dichotomie.

Remarque : (Méthode de Brent)

Le principe consiste à construire une parabole passant par les 3 points de départ et de choisir comme point suivant le point correspondant au minimum de la parabole.

Remarque : (Méthode de Brent)

Le principe consiste à construire une parabole passant par les 3 points de départ et de choisir comme point suivant le point correspondant au minimum de la parabole.

- Cette méthode marche bien pour les fonctions \mathcal{C}^2 telles que $f''(\min) \neq 0$, car ces fonctions se comportent comme des paraboles en ce point. (La convergence sera dans ce cas superlinéaire.)

Remarque : (Méthode de Brent)

Le principe consiste à construire une parabole passant par les 3 points de départ et de choisir comme point suivant le point correspondant au minimum de la parabole.

- Cette méthode marche bien pour les fonctions \mathcal{C}^2 telles que $f''(\min) \neq 0$, car ces fonctions se comportent comme des paraboles en ce point. (La convergence sera dans ce cas superlinéaire.)
- Mais la méthode peut ne pas converger dans le cas général. Usuellement pour régler ce problème on utilise alternativement la méthode de Brent et la méthode précédente.

Extremum local

En dimension >1

- En utilisant le gradient pour pouvoir évaluer les directions descendantes.
↔ Méthode de Powell ou Méthodes sur les gradients.
- Dans le cas de contraintes affines : Méthode du simplexe.