

# Méthodes d'interpolation et d'intégration

## (IS104 - Algorithmique Numérique)

ENSEIRB-MATMECA - INP Bordeaux

Semestre 6

## 1 Interpolation polynomiale

- Existence et Unicité
- Différences divisées
- Points d'interpolation
- Splines cubiques

## 2 Intégration numérique

- Dimension 1
- Erreurs
- Méthode générale - Doublement du pas
- Dimension  $n > 1$

# Interpolation polynomiale

**Problématique** : À partir d'une famille  $\{(x_i; f(x_i))\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ , on souhaite trouver un polynôme  $P$  tel que  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(x_i) = f(x_i)$ .

Un tel polynôme  $P$  s'appelle un polynôme d'interpolation de  $f$  aux points  $\{x_i\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

### Définition

Dans le cadre d'une approximation de  $f$  par un polynôme,  $f$  définie sur un intervalle  $I$  borné, un **polynôme de meilleure approximation à l'ordre  $n$**  pour  $f$  est un polynôme  $P$  tel que, pour tout polynôme  $Q$  de degré  $\leq n$ ,

$$\|P - f\|_{\infty} \leq \|Q - f\|_{\infty}.$$

**Remarque 1** : En général, le calcul du polynôme de meilleur approximation est difficile. On en cherchera donc une approximation de ce polynôme.

**Remarque 2** : Pour la suite, afin d'alléger les notations, on écrira simplement  $\|\cdot\|$  pour  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

# Interpolation polynomiale

## Existence & Unicité

Théorème 

Étant donné un ensemble  $\{(x_i; f(x_i))\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \subset \mathbb{R}^2$ , il existe une unique polynôme  $P_n$  de degré  $\leq n$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_n(x_i) = f(x_i)$$

## Complexité :

- Pour un  $L_i^n$  :  $n$  produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré  $k \rightarrow \mathcal{O}(n^2)$ .
- Pour  $P_n$  :  $\mathcal{O}(n^3)$ .

## Théorème (Polynôme interpolateur de Lagrange)

Étant donné un ensemble  $\{(x_i; f(x_i))\}_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} \subset \mathbb{R}^2$ , il existe une unique polynôme  $P_n$  de degré  $\leq n$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_n(x_i) = f(x_i)$$

En notant  $L_i^n = \frac{\prod_{k \neq i} (x - x_k)}{\prod_{k \neq i} (x_i - x_k)}$ , ce polynôme s'écrit :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i^n(x)$$

### Complexité :

- Pour un  $L_i^n$  :  $n$  produit d'un polynôme de degré 1 par un polynôme de degré  $k \rightarrow \mathcal{O}(n^2)$ .
- Pour  $P_n$  :  $\mathcal{O}(n^3)$ .

**Erreur :** Si  $f$  est  $C^{n+1}$ , on note  $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , alors

$$\|f - P_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \cdot \|f^{(n+1)}\| \quad \text{📌}$$

**Erreur :** Si  $f$  est  $C^{n+1}$ , on note  $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , alors

$$\|f - P_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \cdot \|f^{(n+1)}\| \quad \mathcal{S}$$

**Remarque 1 :**

L'erreur dépend de la répartition des points ( $\|\pi_{n+1}\|$ ) et de  $f$  ( $\|f^{(n+1)}\|$ ).

Le seul paramètre sur lequel on peut agir : la répartition des points.

**Erreur :** Si  $f$  est  $C^{n+1}$ , on note  $\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$ , alors

$$\|f - P_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \cdot \|f^{(n+1)}\| \quad \text{S}$$

**Remarque 1 :**

L'erreur dépend de la répartition des points ( $\|\pi_{n+1}\|$ ) et de  $f$  ( $\|f^{(n+1)}\|$ ).

Le seul paramètre sur lequel on peut agir : la répartition des points.

**Remarque 2 :**

Pour aller plus loin dans l'idée d'interpolation, on peut interpoler  $f$  et sa fonction dérivée aux points  $x_i$  :  $\rightarrow$  Polynômes de Hermite.

# Interpolation polynomiale

## Méthode des différences divisées

On note :

- $N_k(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i)$  (polynômes de Newton)
- $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$  le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme interpolateur de degré  $k$  aux points  $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\}$ .
- $Q_k(x)$  le polynôme interpolateur de degré  $k$  aux points  $\{x_0, \dots, x_k\}$ .

On a alors :

$$Q_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] N_{k-1}(x) \quad \text{✍}$$

On note :

- $N_k(x) = \prod_{i=0}^k (x - x_i)$  (polynômes de Newton)
- $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_k}]$  le coefficient du terme de plus haut degré du polynôme interpolateur de degré  $k$  aux points  $\{x_{i_0}, \dots, x_{i_k}\}$ .
- $Q_k(x)$  le polynôme interpolateur de degré  $k$  aux points  $\{x_0, \dots, x_k\}$ .

On a alors : 
$$Q_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] N_{k-1}(x)$$
 

On peut donc évaluer les valeurs du polynôme en tout point sous réserve de connaître les coefficients  $f[x_0, \dots, x_k]$ .

**Propriété :** Soit  $R_{k-1}$  le polynôme interpolateur de degré  $(k-1)$  aux points  $\{x_1, \dots, x_k\}$ , alors :

$$Q_k(x) = \frac{(x - x_0)R_{k-1}(x) - (x - x_k)Q_{k-1}(x)}{x_k - x_0}$$


Ainsi : 
$$f[x_0, \dots, x_k] = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$$

- Calcul des coefficients  $f[x_0, \dots, x_k]$  / Algorithme de Neville.

	Étape 0	Étape 1	Étape 2	...	Étape n
T[n]	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$f[x_0, \dots, x_n]$
T[n-1]	$f(x_{n-1})$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		$f[x_0, \dots, x_{n-1}]$
T[n-2]	$f(x_{n-2})$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}]$	$f[x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}]$		$f[x_0, \dots, x_{n-2}]$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
T[2]	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	⋯	$f[x_0, x_1, x_2]$
T[1]	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1]$	⋯	$f[x_0, x_1]$
T[0]	$f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0)$	⋯	$f(x_0)$

- Calcul des coefficients  $f[x_0, \dots, x_k]$  / Algorithme de Neville.

	Étape 0	Étape 1	Étape 2	...	Étape n
T[n]	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		$f[x_0, \dots, x_n]$
T[n-1]	$f(x_{n-1})$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}]$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}]$		$f[x_0, \dots, x_{n-1}]$
T[n-2]	$f(x_{n-2})$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}]$	$f[x_{n-4}, x_{n-3}, x_{n-2}]$		$f[x_0, \dots, x_{n-2}]$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
T[2]	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_2]$	⋯	$f[x_0, x_1, x_2]$
T[1]	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1]$	⋯	$f[x_0, x_1]$
T[0]	$f(x_0)$	$f(x_0)$	$f(x_0)$	⋯	$f(x_0)$

### Complexité :

- Coefficients calculés en  $\mathcal{O}(n^2)$  opérations.
- Évaluation du polynôme en un point en  $\mathcal{O}(n)$  avec la méthode d'Horner.
- En espace :  $\mathcal{O}(n)$
- Avec la base des polynômes de Lagrange, toute évaluation se fait en  $\mathcal{O}(n^2)$ .  
Coût amorti meilleur avec la méthode des différences divisées.

**Remarque :** L'ajout d'un point d'interpolation ne rajoute qu'une étape supplémentaire, donc un coût en  $\mathcal{O}(n)$ .

## Méthode de Horner

$$Q_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k] N_{k-1}(x)$$

Soit  $T$  le vecteur défini (cf. algorithme de Neville) par :

$$T[k] = f[x_0, \dots, x_k]$$

$Q_n$  s'écrit alors :

$$T[0] + (x - x_0) (T[1] + (x - x_1) (T[2] + \dots + (x - x_{n-1}) T[n]))$$

Le calcul pour une valeur quelconque se fait alors par une boucle :

```

1 res ← T[n];
2 pour k de (n - 1) à 0;
3 faire
4   res ← T[k] + (x - x_k) × res;

```

# Interpolation polynomiale

## Choix des points d'interpolation

Sur  $[a, b]$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$  et  $x_i = a + ih$  avec  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\pi_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

On pose  $x = a + sh$  avec  $s \in [0, n]$ .

$$\pi_{n+1}(x) = h^{n+1} \prod_{i=0}^n (s - i)$$

Donc  $\|\pi_{n+1}\| \leq h^{n+1} n!$

Ainsi la formule d'erreur  $\|f - P_n\| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|\pi_{n+1}\| \cdot \|f^{(n+1)}\|$  devient :

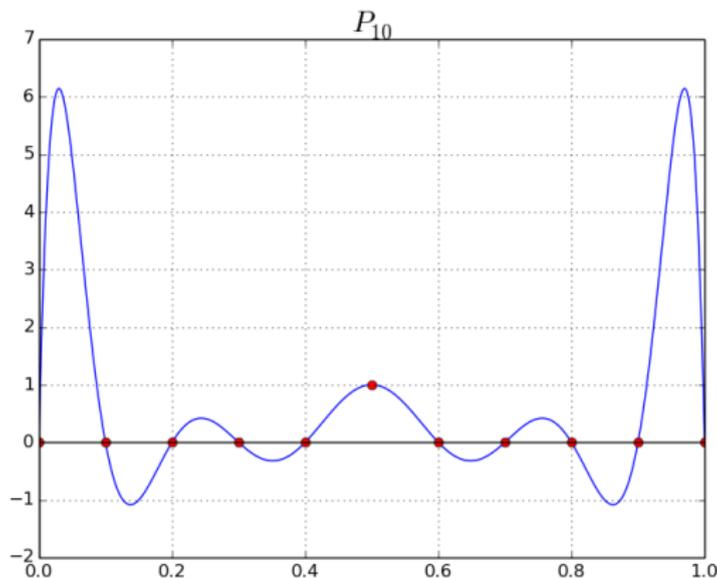
$$\|f - P_n\| \leq \frac{h^{n+1}}{n+1} \|f^{(n+1)}\|$$

Et avec la formule de Stirling ( $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ ), on peut écrire :

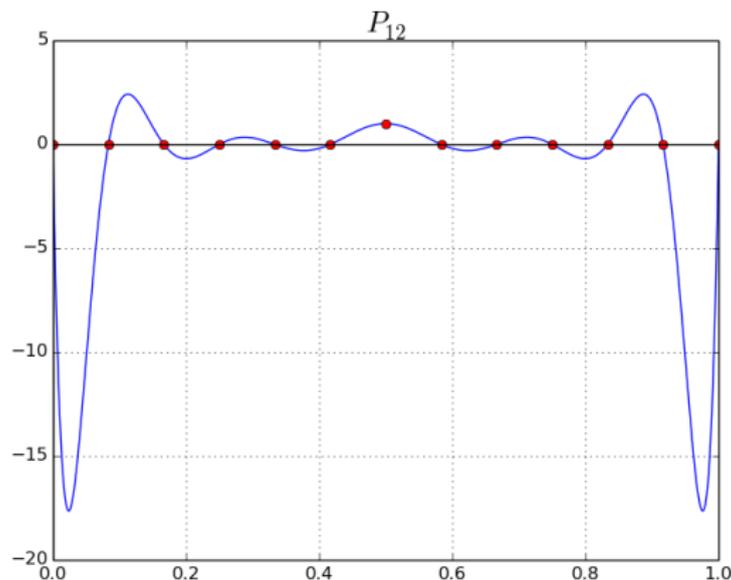
$$\|\pi_{n+1}\| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$$

Le choix de répartition uniforme n'est pas nécessairement le meilleur choix. Les valeurs peuvent devenir très importantes au bord de l'intervalle (et le problème s'accroît avec  $n$  grand).

$P_{10}$  polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 10 avec une répartition uniforme sur  $[0, 1]$  :



$P_{12}$  polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 12 avec une répartition uniforme sur  $[0, 1]$  :



On choisit les points d'interpolations pour que les polynômes  $L_i^n$  restent bornés sur  $[a, b]$ .

Une solution est d'utiliser les polynômes de Tchebicheff qui sont définis de la manière suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \text{ pour } x \in [-1; 1]$$

Ils sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$



On choisit les points d'interpolations pour que les polynômes  $L_i^n$  restent bornés sur  $[a, b]$ .

Une solution est d'utiliser les polynômes de Tchebicheff qui sont définis de la manière suivante :

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \text{ pour } x \in [-1; 1]$$

Ils sont définis par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ pour } n > 0 \end{cases}$$



- Ces polynômes sont bornés par 1 en valeur absolue.
- Les racines de  $T_n$  sont  $x_k^n = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)$  pour  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . ( $x_k^n \in [-1; 1]$ )

Pour se ramener à l'intervalle  $[a, b]$ , on peut utiliser le changement de variable :

$$\begin{aligned}\varphi: [-1; 1] &\longrightarrow [a, b] \\ u &\longmapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u\end{aligned}$$

On souhaite majorer en norme infinie  $\pi_{n+1}$

Les points d'interpolation sur  $[-1; 1]$ ,  $u_i^{n+1} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$  deviennent :

$$x_i^{n+1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad (0 \leq i \leq n)$$

On obtient alors :  $\|\pi_{n+1}\| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$  

Pour se ramener à l'intervalle  $[a, b]$ , on peut utiliser le changement de variable :

$$\begin{aligned} \varphi: [-1; 1] &\longrightarrow [a, b] \\ u &\longmapsto x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u \end{aligned}$$

On souhaite majorer en norme infinie  $\pi_{n+1}$

Les points d'interpolation sur  $[-1; 1]$ ,  $u_i^{n+1} = \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right)$  deviennent :

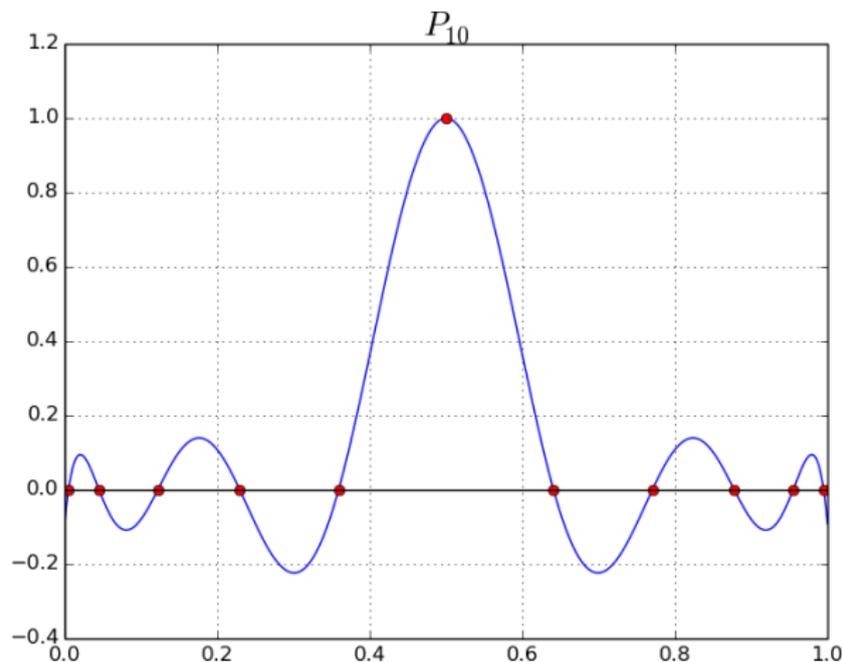
$$x_i^{n+1} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad (0 \leq i \leq n)$$

On obtient alors :  $\|\pi_{n+1}\| = 2 \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$  

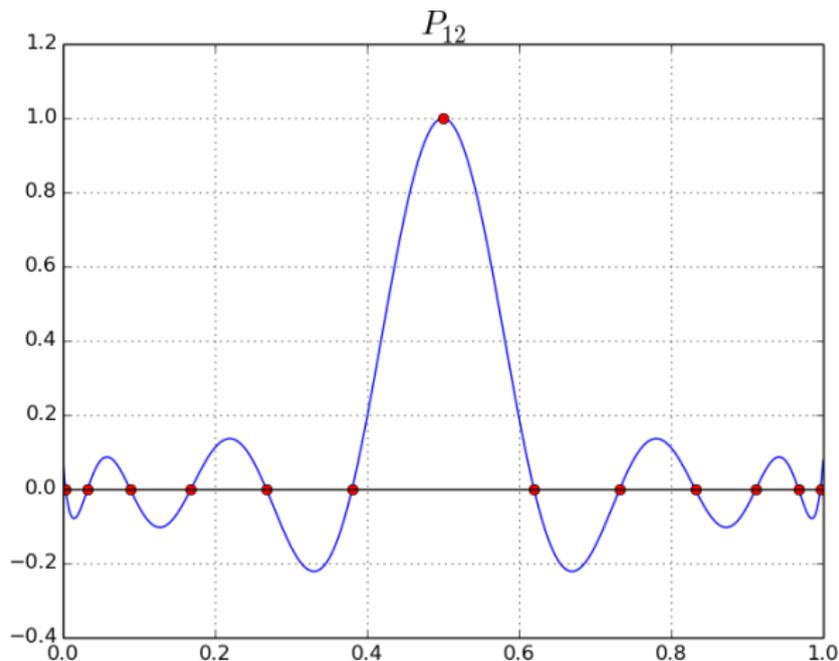
Ce choix de points permet donc d'avoir une méthode d'interpolation plus stable.

Si l'on compare au choix uniforme où  $\|\pi_{n+1}\| = \mathcal{O}\left(\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}\right)$ , pour  $n = 30$  par exemple, on a  $(e/4)^{n+1} < 7.10^{-6}$

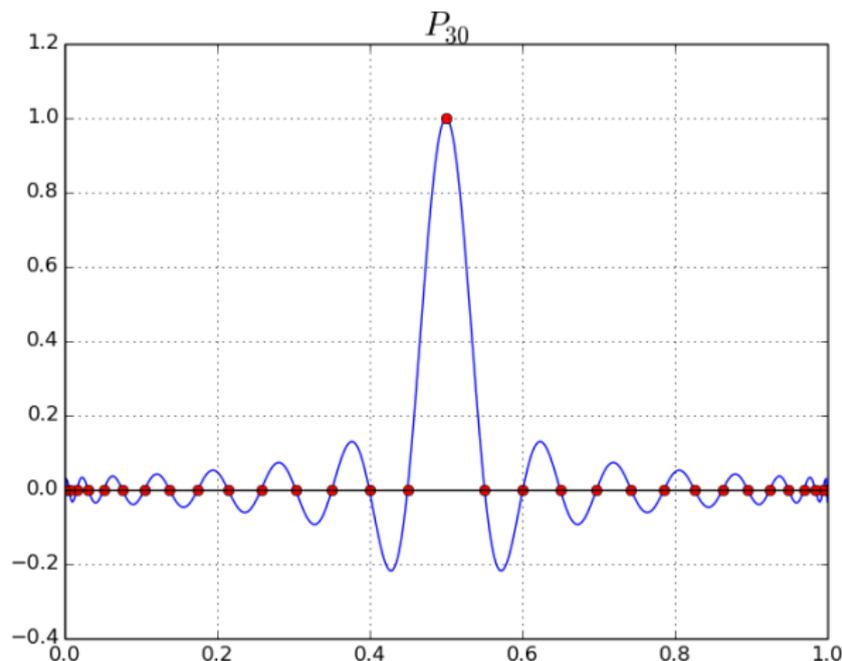
$P_{10}$  polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 10 avec une répartition suivant les points de Tchebicheff sur  $[0, 1]$  :



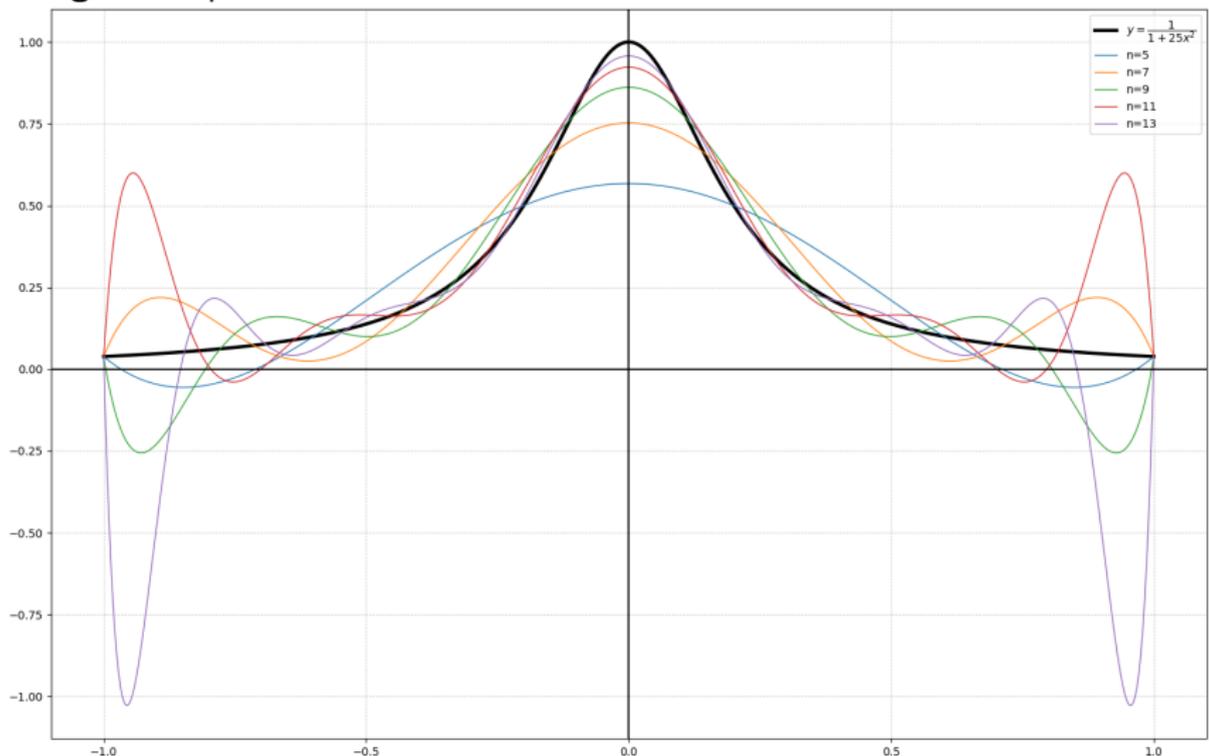
$P_{12}$  polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 12 avec une répartition suivant les points de Tchebicheff sur  $[0, 1]$  :

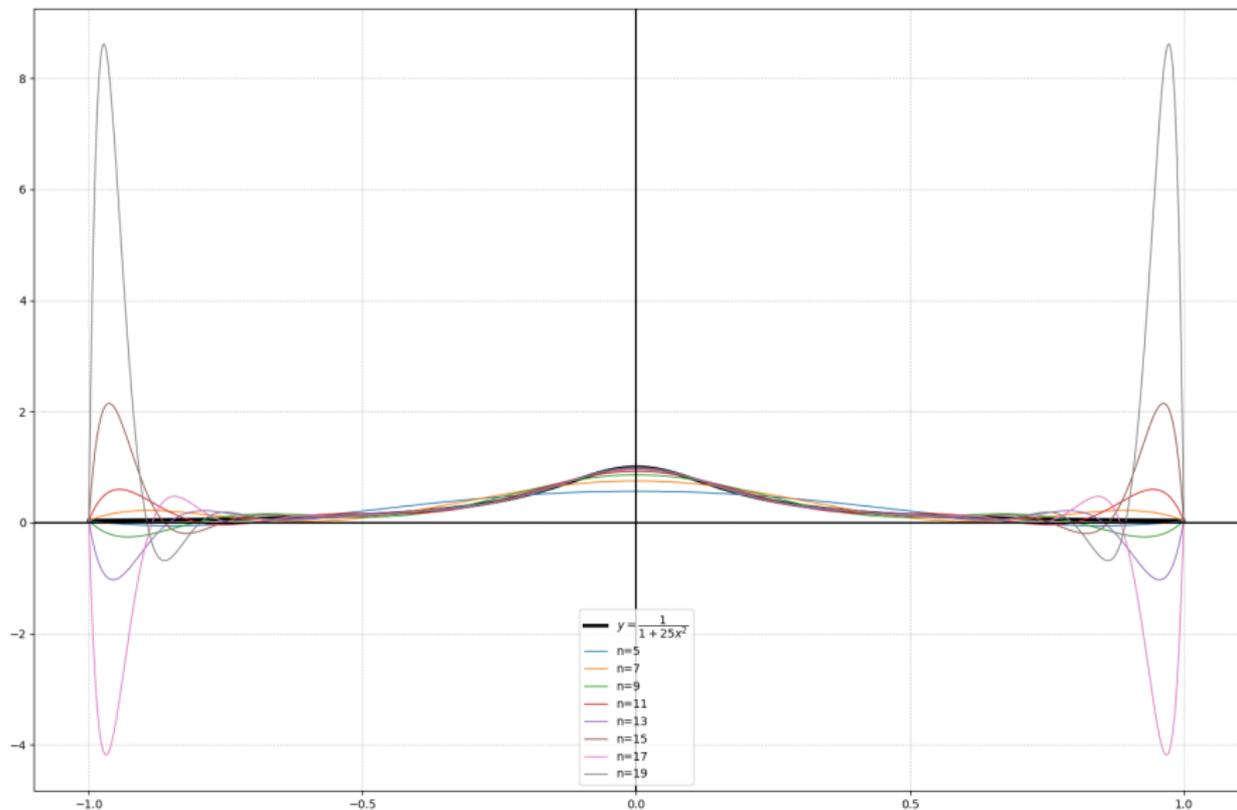


$P_{30}$  polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 30 avec une répartition suivant les points de Tchebicheff sur  $[0, 1]$  :



Quand le procédé d'interpolation ne converge pas, il se produit le **phénomène de Runge**. Exemple :

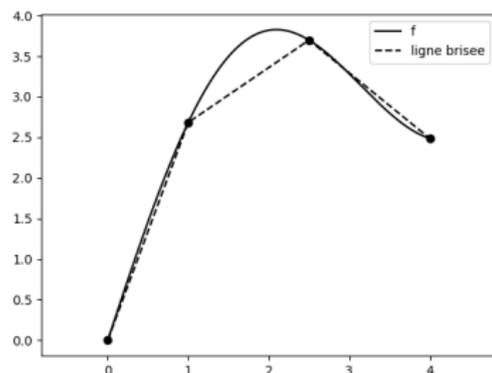




Interpolation polynomiale

Splines cubiques

- Pour une fonction  $f$  définie sur  $[a; b]$  :
  - On connaît l'image  $y_i$  de  $(n + 2)$  points  $x_i$  de l'intervalle.  
(Pour  $i \in \llbracket 0; n + 1 \rrbracket$ ,  $f(x_i) = y_i$ ).
  - On veut une fonction  $\omega$  interpolant  $f$  aux points  $x_i$ .
- Avec des polynômes de haut degré  $\rightarrow$  rapidement phénomène de Runge.  
 $\hookrightarrow$  Il est en général préférable de subdiviser l'intervalle en plusieurs sous-intervalles et d'utiliser sur ceux-ci une interpolation polynomiale avec un ordre peu élevé.  
 Cette méthode a le désavantage de produire une interpolation dont la dérivée n'est pas continue. On pourrait réaliser une interpolation linéaire sur chaque sous-intervalle :



$$\omega_{[x_i; x_{i+1}]}(x) = A_i(x)y_i + B_i(x)y_{i+1}$$

avec  $A_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$  et  $B_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

( $A_i(x_i) = 1$ ;  $A_i(x_{i+1}) = 0$ ;  $B_i(x) = 1 - A_i(x)$ )

Le problème de cette solution « simple » d'une approximation par une fonction affine par morceaux est qu'il y a des « cassures » aux points d'interpolation, c'est-à-dire que l'approximation n'est pas une fonction  $C^1$ .

$\hookrightarrow$  Pour obtenir une interpolation suffisamment lisse, on préfère utiliser la méthode des **splines cubiques** (utilisée en TP). Le principe est une interpolation par morceaux par des polynômes de degré 3 mais en imposant des « raccords »  $\mathcal{C}^2$ . Cela ne peut évidemment pas se faire avec des fonctions affines (pour lesquelles on peut juste obtenir des raccords  $\mathcal{C}^0$ ), mais on peut l'obtenir avec des polynômes de degré 3 (2 contraintes supplémentaires sur les dérivées premières et seconde  $\rightarrow$  2 degrés de plus sur le polynôme).

En notant  $h_i = x_{i+1} - x_i$ , l'approximation par splines cubiques est définie par :

$$\begin{aligned}
 \omega_{|[x_i; x_{i+1}]}(x) &= A_i(x)y_i + B_i(x)y_{i+1} \\
 &+ \frac{h_i^2}{6} \left( y_i'' \left( A_i^3(x) - A_i(x) \right) + y_{i+1}'' \left( B_i^3(x) - B_i(x) \right) \right) \quad (*)
 \end{aligned}$$

avec comme précédemment  $A_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}$  et  $B_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}$

et où les  $(y_i'')_{i \in [0; n+1]}$  sont des coefficients à déterminer pour que  $\omega$  soit de classe  $\mathcal{C}^2$ .

Pour la suite on notera  $\omega_{|[x_i; x_{i+1}]} = \omega_i$ .

$$A_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}; B_i(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \text{ et } A'_i(x) = -\frac{1}{h_i}; B'_i(x) = \frac{1}{h_i}$$

$$\omega_i(x) = A_i(x)y_i + B_i(x)y_{i+1} + \frac{h_i^2}{6} (y_i'' (A_i^3(x) - A_i(x)) + y_{i+1}'' (B_i^3(x) - B_i(x)))$$

$$\omega'_i(x) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (y_i'' (1 - 3A_i^2(x)) + y_{i+1}'' (3B_i^2(x) - 1))$$

$$\omega''_i(x) = y_i'' A_i(x) + y_{i+1}'' B_i(x)$$

Remarque :  $\omega''_i(x_{i+1}) = y_{i+1}'' = \omega''_{i+1}(x_{i+1})$ . Donc  $\omega''$  est bien continue.

$$\omega'_{i-1}(x_i) = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \frac{h_{i-1}}{6} (y_{i-1}'' + 2y_i'')$$

$$\text{et } \omega'_i(x_i) = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} + \frac{h_i}{6} (-2y_i'' - y_{i+1}'')$$

Pour que  $\omega'$  soit continue, il faut pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$   $\omega'_{i-1}(x_i) = \omega'_i(x_i)$

$$\text{Soit : } \frac{h_{i-1}}{6} y_{i-1}'' + \frac{h_{i-1} + h_i}{3} y_i'' + \frac{h_i}{6} y_{i+1}'' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} \quad (*)$$

Il faut imposer les conditions « initiales » pour les 2 points aux extrémités de l'intervalle  $x_0$  et  $x_{n+1}$ . Par exemple pour un « spline naturel » on prend

$$y''_0 = y''_{n+1} = 0.$$

La résolution du système d'équations (\*) peut s'écrire sous forme matricielle  $AV = B$  avec :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h_0 + h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{h_1}{6} & \frac{h_1 + h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2} + h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & \dots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1} + h_n}{3} \end{pmatrix}$$

( $A$  matrice tridiagonale symétrique.)

$$V = \begin{pmatrix} y_1'' \\ \vdots \\ y_n'' \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{n+1} - y_n}{h_n} - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{pmatrix}$$

Ainsi l'interpolation par spline cubique nécessite :

- ① de pré-calculer et stocker les coefficients  $y_i''$  solution du système.  
Attention ! Ces coefficients ne sont calculés qu'une seule fois quelque soit le nombre de points où l'on va ensuite calculer une approximation de  $f$ .  
( $\hookrightarrow$  Fonction spline du « Numerical Recipes in C ».)
- ② pour évaluer une approximation de  $f$  en  $x$  :
  - ▶ de déterminer l'intervalle tel que  $x \in [x_i; x_{i+1}]$  (par dichotomie par exemple)
  - ▶ puis de calculer  $\omega_i(x)$  avec la formule ( $\star$ ).
 ( $\hookrightarrow$  Fonction splint du « Numerical Recipes in C ».)

Exemple : (Pour la même courbe que pour les approximations affines par morceaux.)

$$x=[0.0, 1.0, 2.5, 4.0], \text{ et } y=[0.0, 2.682942, 3.696944, 2.486395]$$

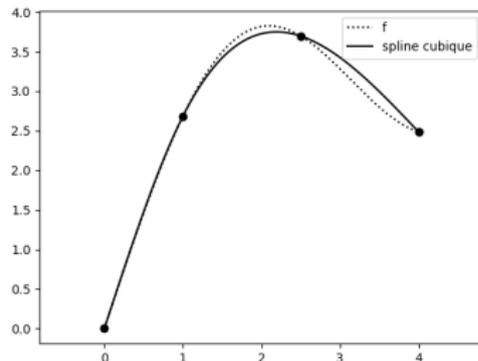
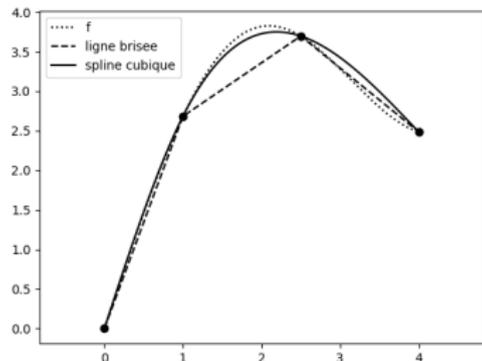
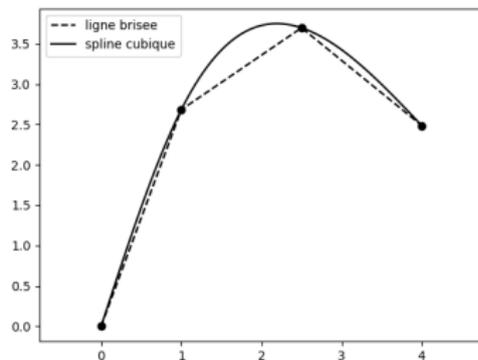
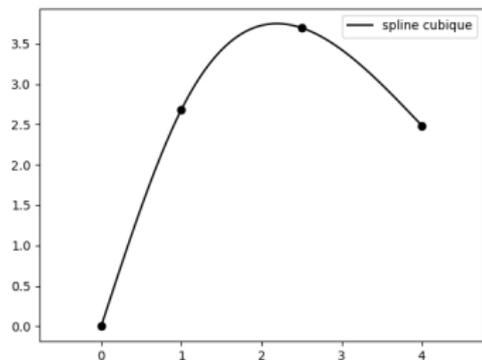
$$h=[1.0, 1.5, 1.5]$$

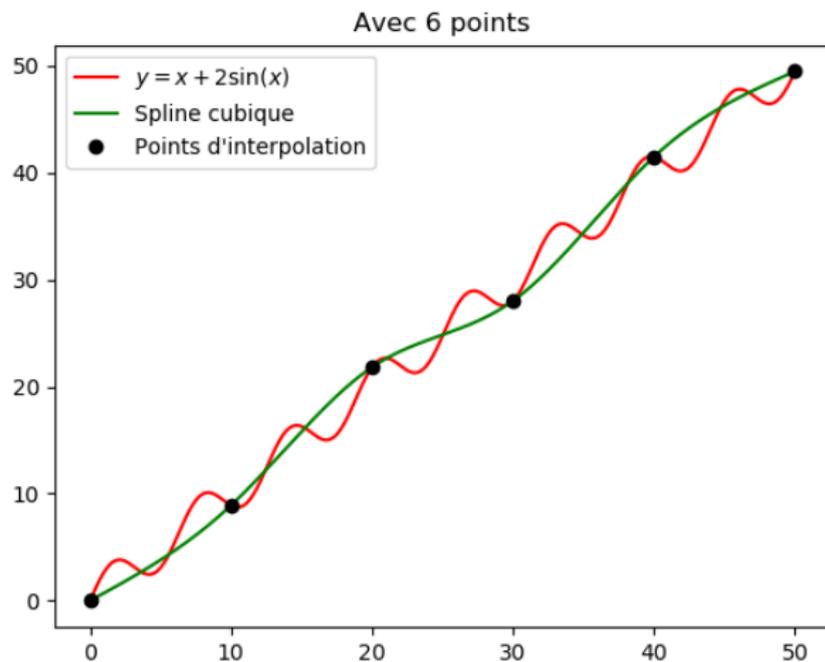
$$A = \begin{pmatrix} 0.833333 & 0.25 \\ 0.25 & 1.0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -2.00694067 \\ -1.483034 \end{pmatrix}$$

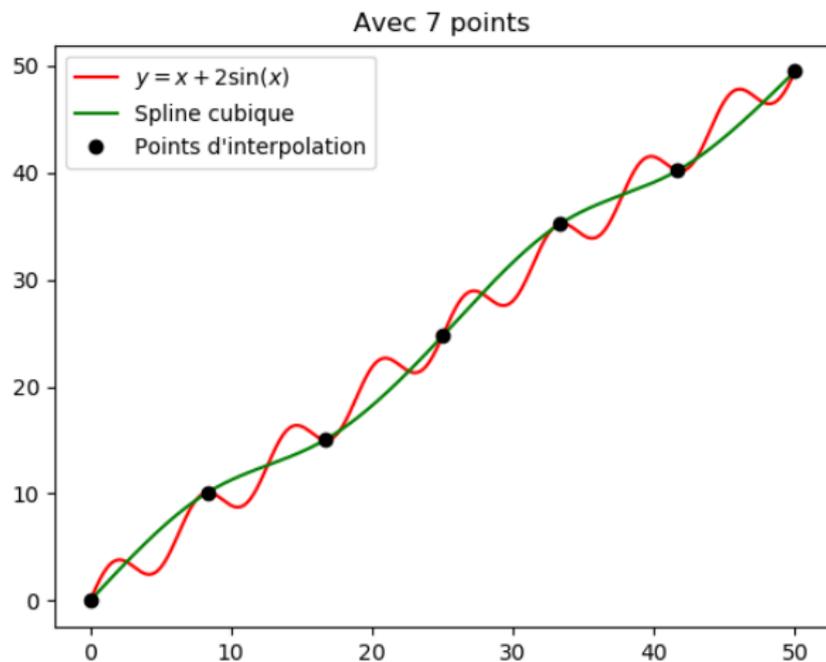
La solution du système est : sol=[-2.122615625, -0.952380094].

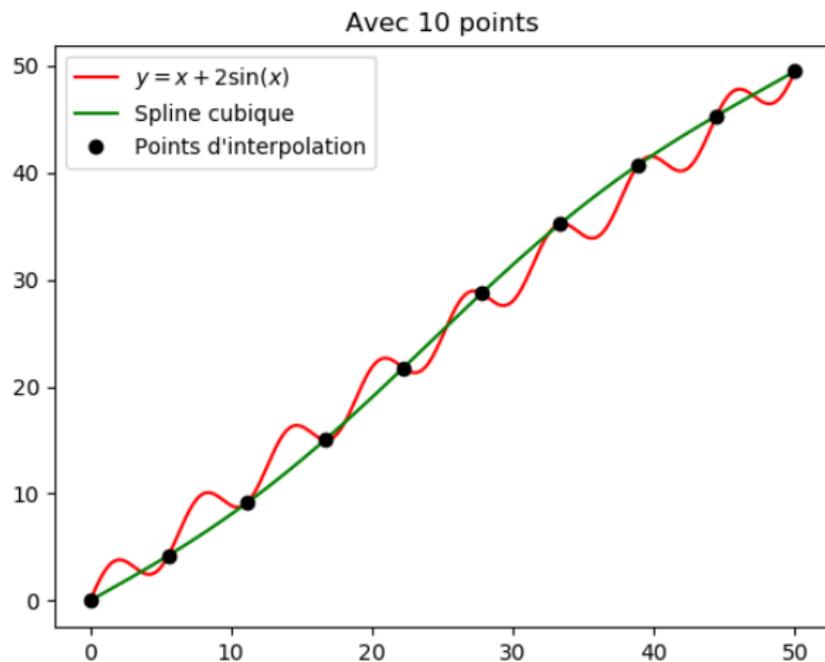
On peut ainsi tracer l'approximation par « spline cubique naturel » avec :

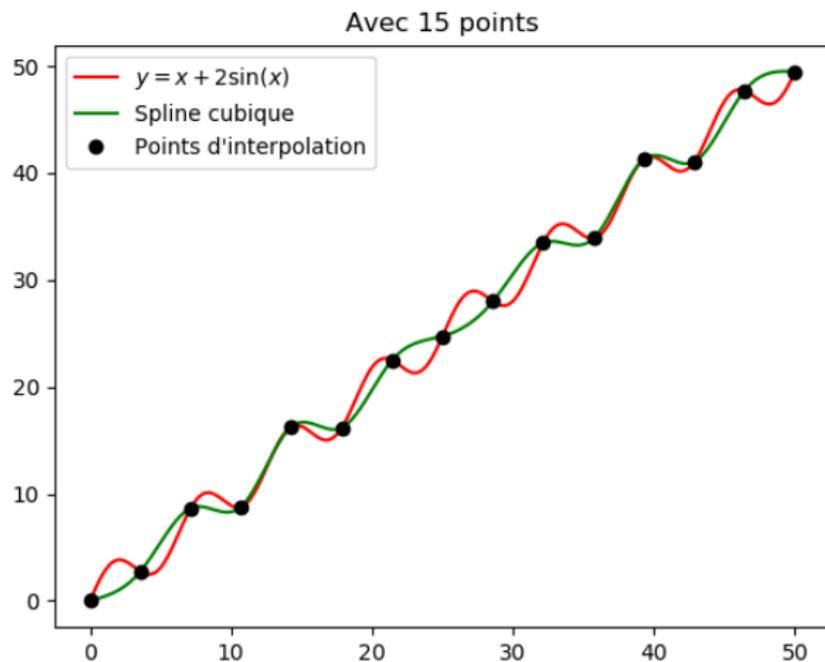
$$y''=[0.0, -2.122615625, -0.952380094, 0.0]$$

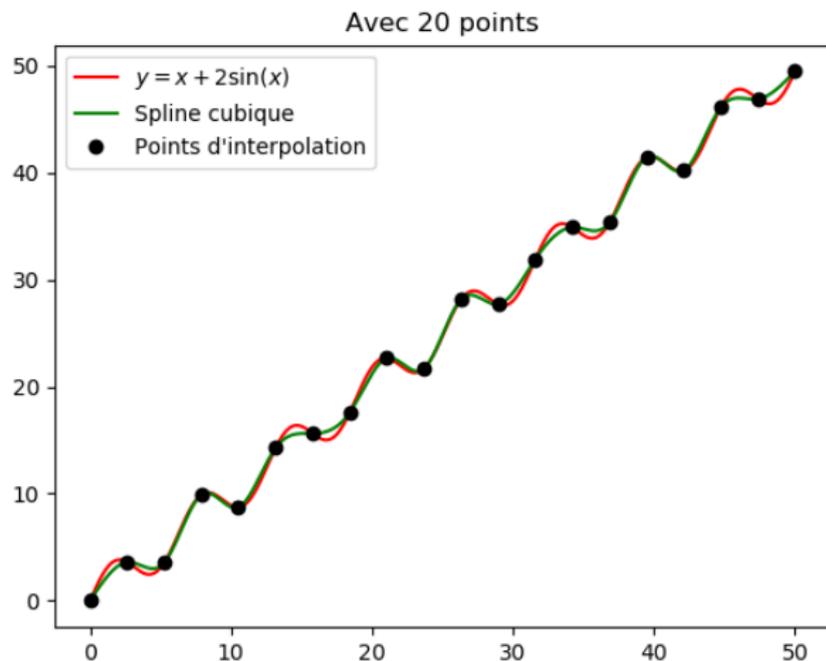


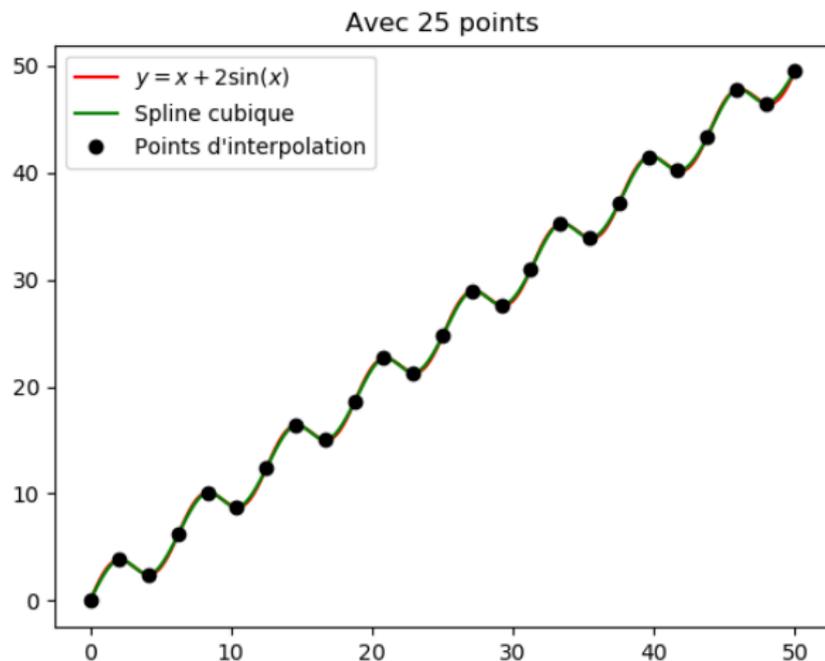


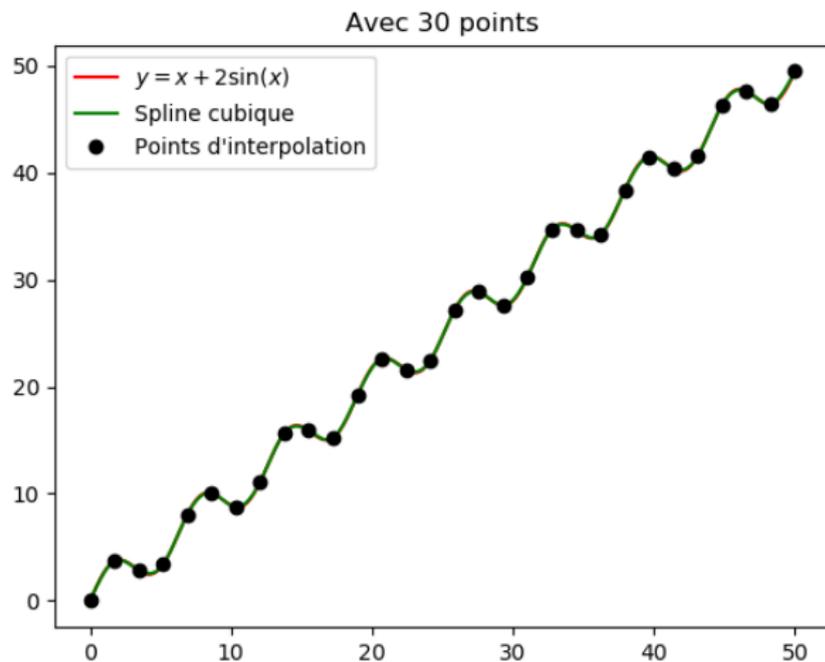




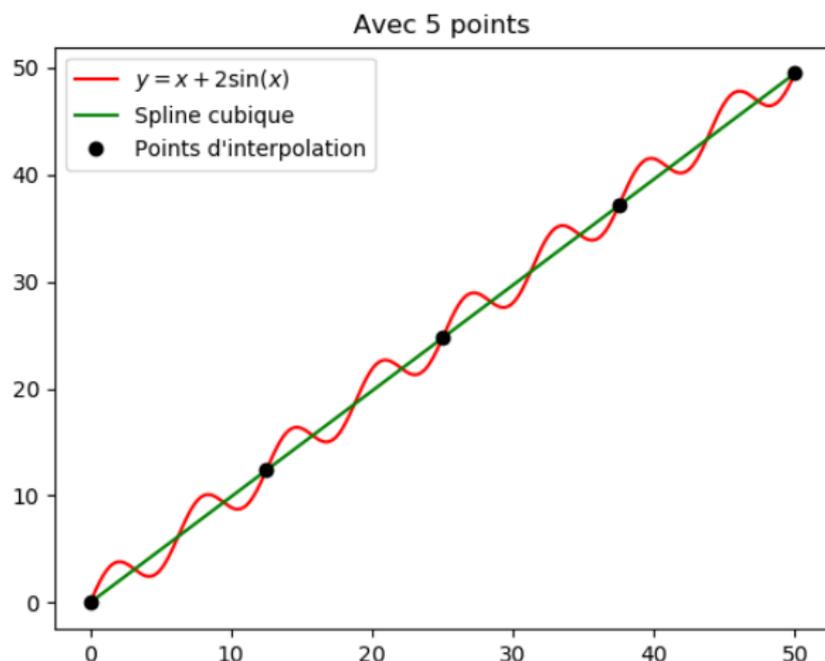




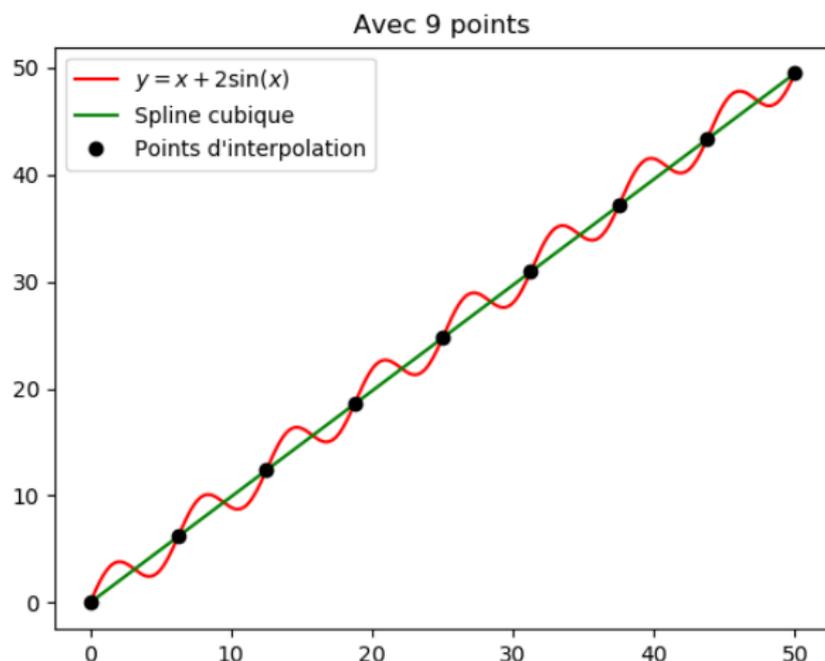




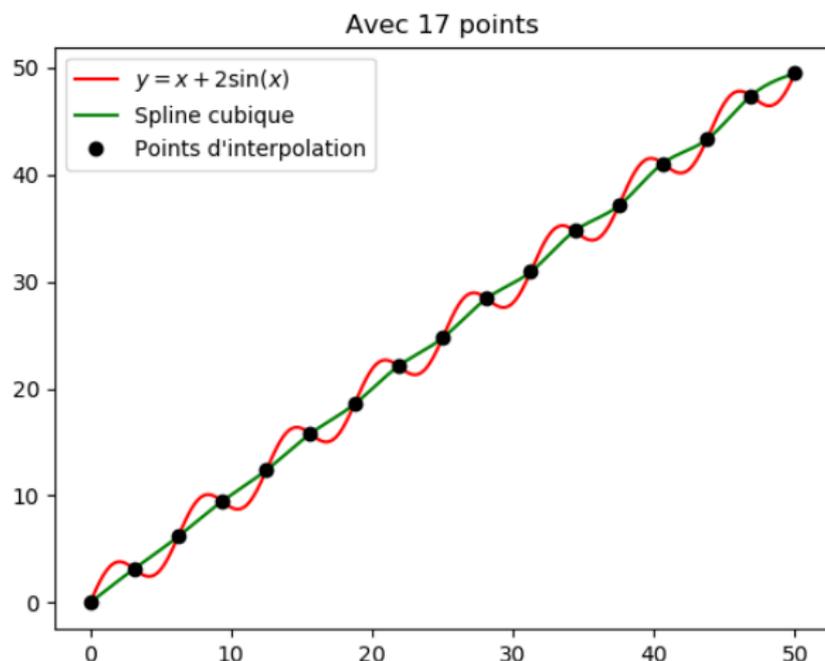
Attention, pour  $N$  faible, on peut tomber sur une période. (Ici  $4\pi$ .)



Attention, pour  $N$  faible, on peut tomber sur une période. (Ici  $2\pi$ .)



Attention, pour  $N$  faible, on peut tomber sur une période. (Ici  $\pi$ .)



# Intégration numérique

Étant donnée une fonction  $f$  définie et intégrable sur  $[a, b]$  (éventuellement  $]a, b[$ ),

on souhaite calculer :  $I = \int_a^b f(t) dt$

Étant donnée une fonction  $f$  définie et intégrable sur  $[a, b]$  (éventuellement  $]a, b[$ ),

on souhaite calculer :  $I = \int_a^b f(t) dt$

**Problème(s) ?**

- Hormis « quelques » cas, on ne sait pas déterminer une primitive de  $f$
- $f$  peut ne pas être donnée par une formule, mais seulement par un relevé de valeurs par exemple . . .

Étant donnée une fonction  $f$  définie et intégrable sur  $[a, b]$  (éventuellement  $]a, b[$ ),

on souhaite calculer :  $I = \int_a^b f(t) dt$

### Problème(s) ?

- Hormis « quelques » cas, on ne sait pas déterminer une primitive de  $f$
- $f$  peut ne pas être donnée par une formule, mais seulement par un relevé de valeurs par exemple . . .

### Comment s'y prendre ? / Méthodes usuelles

- Faire un approximation de  $f$  par une fonction dont on sait calculer l'intégrale sur l'intervalle  $[a, b]$ .  
Mais sur un intervalle large, c'est un problème difficile
- Subdiviser l'intervalle  $[a, b]$  en plusieurs « petits » intervalles et réaliser une approximation de  $f$  sur chacun de ces intervalles.
- On aura donc des erreurs d'approximation de  $f$  (erreurs de méthodes). Peut poser problème, en particulier quand  $f$  non définie aux bornes.

Étant donnée une fonction  $f$  définie et intégrable sur  $[a, b]$  (éventuellement  $]a, b[$ ),

on souhaite calculer :  $I = \int_a^b f(t) dt$

### Problème(s) ?

- Hormis « quelques » cas, on ne sait pas déterminer une primitive de  $f$
- $f$  peut ne pas être donnée par une formule, mais seulement par un relevé de valeurs par exemple . . .

### Comment s'y prendre ? / Méthodes usuelles

- Faire un approximation de  $f$  par une fonction dont on sait calculer l'intégrale sur l'intervalle  $[a, b]$ .  
Mais sur un intervalle large, c'est un problème difficile
- Subdiviser l'intervalle  $[a, b]$  en plusieurs « petits » intervalles et réaliser une approximation de  $f$  sur chacun de ces intervalles.
- On aura donc des erreurs d'approximation de  $f$  (erreurs de méthodes). Peut poser problème, en particulier quand  $f$  non définie aux bornes.

**Complexité** : En nombre d'appels à  $f$ .

# Intégration numérique

## En dimension 1 Méthodes de Newton–Cotes

## Principe

- ① On effectue une subdivision du segment  $[a, b]$  :  $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = b$ .

$$I = \int_a^b f(t) dt = \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(t) dt$$

- ② Puis sur chaque segment de la subdivision (supposé assez petit) on approxime l'intégrale à l'aide d'une formule de quadrature élémentaire.

$$I = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(t) dt \approx (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \times \left( \sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} f(\lambda_{ij}) \right)$$

avec  $\forall j \in \llbracket 0, \ell_i \rrbracket$ ,  $\lambda_{ij} \in [\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , et  $\sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} = 1$ .

- ▶ Autrement dit, on approxime  $f$  par une combinaison linéaire de valeurs qu'elle prend sur l'intervalle.
- ▶ Les  $\omega_{ij}$  s'appellent les poids.

Comme  $\sum_{j=0}^{\ell_i} \omega_{ij} = 1$ , on réalise une « moyenne » de  $f$  sur l'intervalle.

## Définition : Ordre de convergence

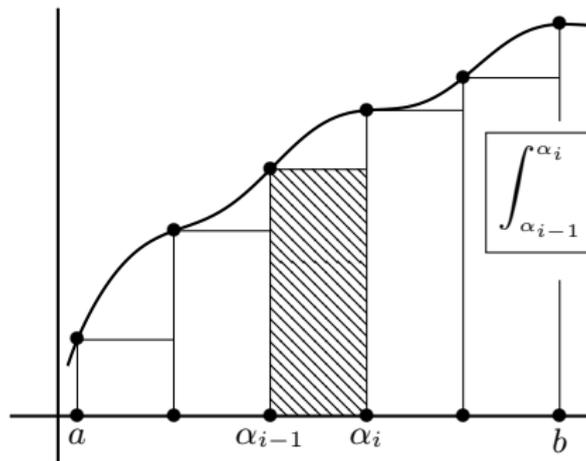
Une formule de quadrature est d'ordre  $n$  lorsqu'elle est exacte pour tous les polynômes de  $\mathbb{R}_n[X]$  et inexacte pour au moins un polynôme de  $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ .

## Remarque

Toutes les méthodes de quadrature sont au moins d'ordre 0.

$\ell_i = 0$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une des valeurs prises (un polynôme constant). Pour un intervalle  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , on peut choisir  $\alpha_{i-1}$  :

- $f(\alpha_{i-1})$  : **Méthode des rectangles à gauche**

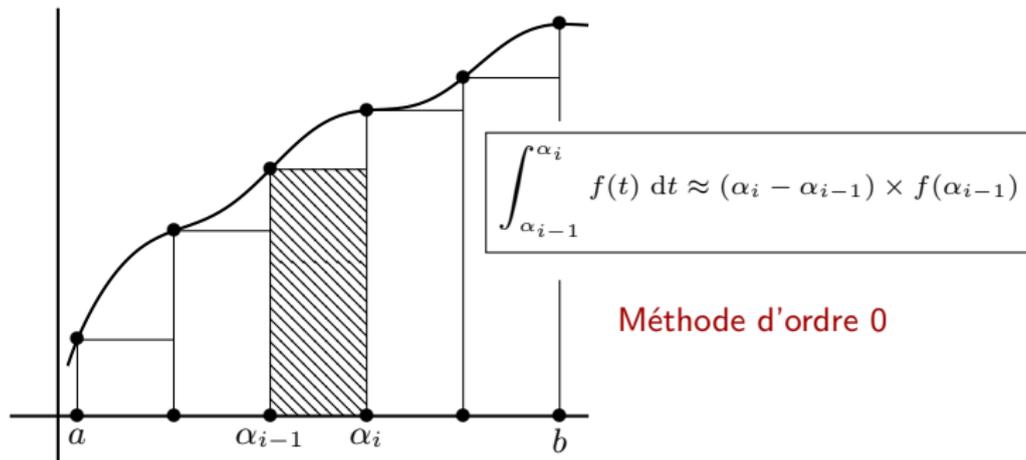


$$\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(t) dt \approx (\alpha_i - \alpha_{i-1}) \times f(\alpha_{i-1})$$

Méthode d'ordre 0

$\ell_i = 0$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une des valeurs prises (un polynôme constant). Pour un intervalle  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , on peut choisir  $\alpha_{i-1}$  :

- $f(\alpha_{i-1})$  : **Méthode des rectangles à gauche**

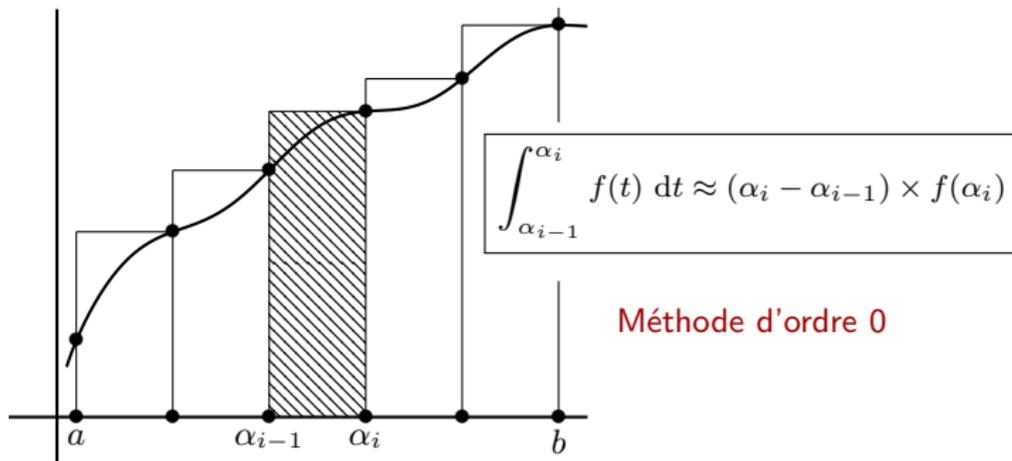


Si le pas est régulier :  $h = \frac{b-a}{n}$ .  $\alpha_k = a + k \times h$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$I_{Rg} = \int_a^b f(t) dt \approx h \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(a + ih) \right)$$

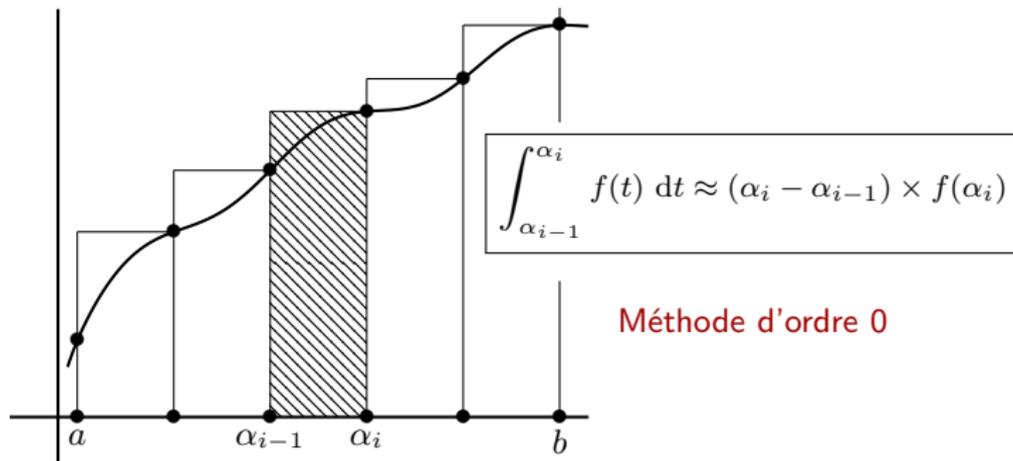
$\ell_i = 0$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une des valeurs prises (un polynôme constant). Pour un intervalle  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , on peut choisir  $\alpha_i$  :

- $f(\alpha_i)$  : **Méthode des rectangles à droite**



$\ell_i = 0$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une des valeurs prises (un polynôme constant). Pour un intervalle  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , on peut choisir  $\alpha_i$  :

- $f(\alpha_i)$  : **Méthode des rectangles à droite**

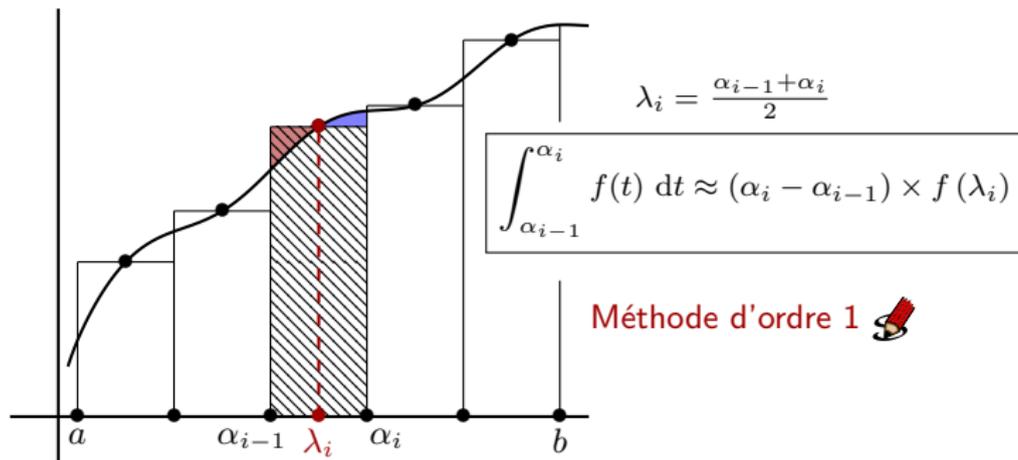


Si le pas est régulier :  $h = \frac{b-a}{n}$ .  $\alpha_k = a + k \times h$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$I_{Rd} = \int_a^b f(t) dt \approx h \left( \sum_{i=1}^n f(a + ih) \right)$$

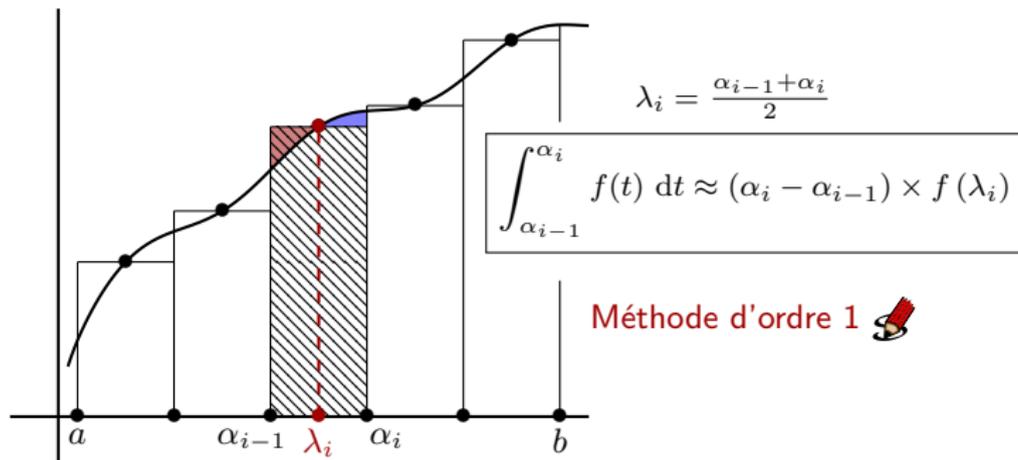
$\ell_i = 0$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une des valeurs prises (un polynôme constant). Pour un intervalle  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , on peut choisir  $\lambda_i = \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}$  :

- $f(\lambda_i)$  : **Méthode des rectangles du point milieu**



$\ell_i = 0$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une des valeurs prises (un polynôme constant). Pour un intervalle  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ , on peut choisir  $\lambda_i = \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}$  :

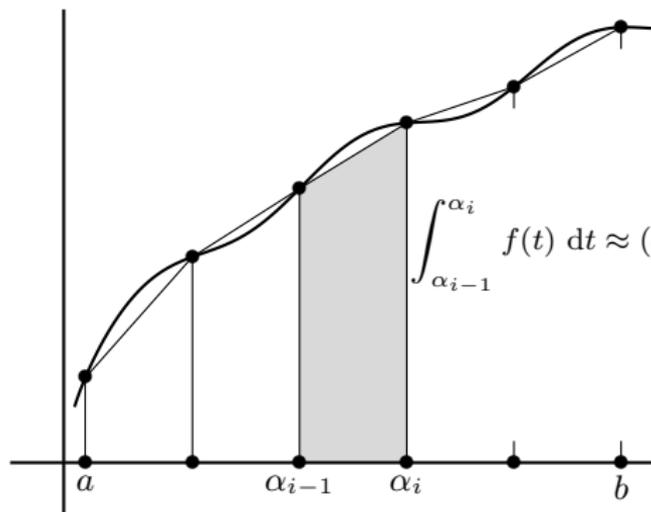
- $f(\lambda_i)$  : **Méthode des rectangles du point milieu**



Si le pas est régulier :  $h = \frac{b-a}{n}$ .  $\alpha_k = a + k \times h$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

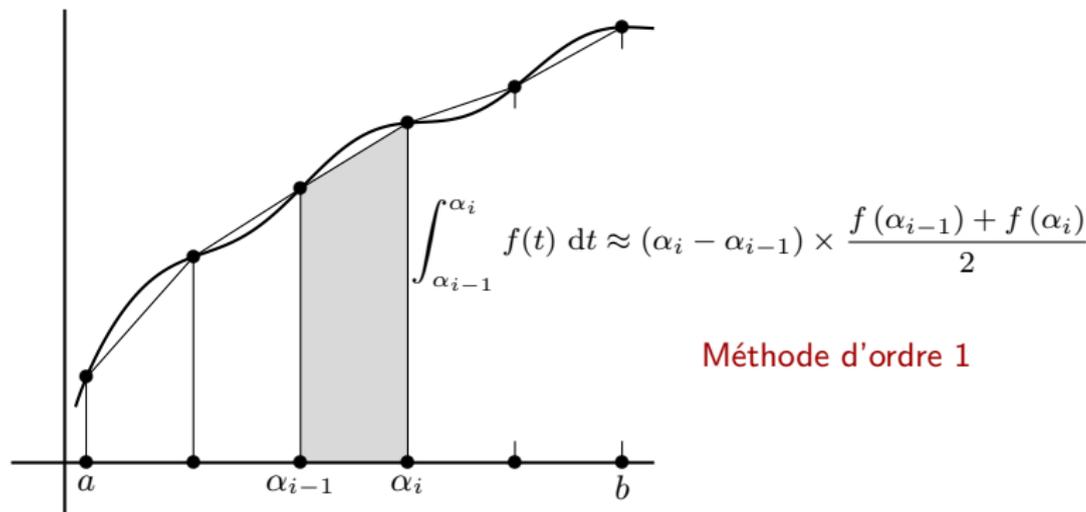
$$I_{Rm} = \int_a^b f(t) dt \approx h \left( \sum_{i=0}^{n-1} f \left( a + ih + \frac{h}{2} \right) \right)$$

$\ell_i = 1$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une fonction affine. Les deux points pour définir la droite sont en général les deux extrémités du segment ( $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$ ).



Méthode d'ordre 1

$\ell_i = 1$ , i.e. on fait une approximation de  $f$  par une fonction affine. Les deux points pour définir la droite sont en général les deux extrémités du segment ( $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$ ).



Si le pas est régulier :  $h = \frac{b-a}{n}$ .  $\alpha_k = a + k \times h$  avec  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

$$I_T = \int_a^b f(t) dt \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) \right)$$

**Remarque :**

Dans le cas où l'on a une subdivision régulière :

- $I_{Rg} = I_T + \frac{h}{2}(f(a) - f(b))$

ou  $I_T = I_{Rg} + \frac{h}{2}(f(b) - f(a))$

- $I_{Rd} = I_T + \frac{h}{2}(f(b) - f(a))$

ou  $I_T = I_{Rd} + \frac{h}{2}(f(a) - f(b))$

On passe donc d'une méthode d'ordre 0 à une méthode d'ordre 1 (et inversement) très facilement, avec très peu de différence.

 Il faut donc être très attentif lors de la mise en œuvre car en se trompant d'un indice, on peut changer l'ordre de la méthode.

## Méthodes d'ordre supérieur.

- On fait une approximation de la fonction par un polynôme.  
*Remarque : Rectangles à gauche ou à droite  $\rightarrow$  polynôme de degré 0.*  
*Trapèzes  $\rightarrow$  polynôme de degré 1.*

## Méthodes d'ordre supérieur.

- On fait une approximation de la fonction par un polynôme.  
*Remarque : Rectangles à gauche ou à droite  $\rightarrow$  polynôme de degré 0.*  
*Trapèzes  $\rightarrow$  polynôme de degré 1.*
- Les méthodes d'interpolation polynomiale uniforme s'appellent les méthodes de **Newton-Cotes**.

## Méthodes d'ordre supérieur.

- On fait une approximation de la fonction par un polynôme.  
*Remarque : Rectangles à gauche ou à droite  $\rightarrow$  polynôme de degré 0.*  
*Trapèzes  $\rightarrow$  polynôme de degré 1.*
- Les méthodes d'interpolation polynomiale uniforme s'appellent les méthodes de **Newton-Cotes**.
- On se fixe un entier  $\ell \geq 1$  ( $\ell$  est le degré du polynôme d'interpolation). La subdivision donne  $(\ell + 1)$  points d'interpolation que l'on répartit uniformément :
  - Posons  $h = \frac{b-a}{n}$ . Pour  $k \in \llbracket 0, \ell \rrbracket$ , on a  $\lambda_{i,k} = \alpha_{i-1} + \frac{k}{\ell} \times h$
  - Notons  $L_{i,k}$  le polynôme de degré  $\ell$  qui s'annule en  $\lambda_{i,j}$  si  $j \neq k$  et  $L_{i,k}(\lambda_{i,k}) = 1$ , et,  $P_i(x) = \sum_{k=0}^{\ell} f(\lambda_{i,k})L_{i,k}(x)$
  - $\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(t) dt \approx \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \left( \sum_{k=0}^{\ell} f(\lambda_{i,k})L_{i,k}(t) \right) dt$   

$$= \sum_{k=0}^{\ell} f(\lambda_{i,k}) \left( \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} L_{i,k}(t) dt \right)$$

## Méthodes d'ordre supérieur.

- On fait une approximation de la fonction par un polynôme.  
*Remarque : Rectangles à gauche ou à droite  $\rightarrow$  polynôme de degré 0.*  
*Trapèzes  $\rightarrow$  polynôme de degré 1.*
- Les méthodes d'interpolation polynomiale uniforme s'appellent les méthodes de **Newton-Cotes**.

- On se fixe un entier  $\ell \geq 1$  ( $\ell$  est le degré du polynôme d'interpolation). La subdivision donne  $(\ell + 1)$  points d'interpolation que l'on répartit uniformément :

- Posons  $h = \frac{b-a}{n}$ . Pour  $k \in \llbracket 0, \ell \rrbracket$ , on a  $\lambda_{i,k} = \alpha_{i-1} + \frac{k}{\ell} \times h$

- Notons  $L_{i,k}$  le polynôme de degré  $\ell$  qui s'annule en  $\lambda_{i,j}$  si  $j \neq k$  et

- $L_{i,k}(\lambda_{i,k}) = 1$ , et,  $P_i(x) = \sum_{k=0}^{\ell} f(\lambda_{i,k}) L_{i,k}(x)$

- $\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(t) dt \approx \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \left( \sum_{k=0}^{\ell} f(\lambda_{i,k}) L_{i,k}(t) \right) dt$   

$$= \sum_{k=0}^{\ell} f(\lambda_{i,k}) \left( \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} L_{i,k}(t) dt \right)$$

Comme la subdivision est régulière et que la répartition des points est uniforme les coefficients  $\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} L_{i,k}(t) dt$  sont indépendants de  $\alpha_{i-1}$  et  $\alpha_i$  par changement de variable et symétrie.

**Exemple : Calcul des coefficients pour  $\ell = 2$   
(Méthode de Simpson)**

- $h = \frac{b-a}{n} = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ . Notons  $m_i = \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}$

Sur  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ ,  $I_S = h \times \left( \frac{1}{6}f(\alpha_{i-1}) + \frac{2}{3}f(m_i) + \frac{1}{6}f(\alpha_i) \right)$



**Exemple : Calcul des coefficients pour  $\ell = 2$   
 (Méthode de Simpson)**

- $h = \frac{b-a}{n} = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ . Notons  $m_i = \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}$

Sur  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ ,  $I_S = h \times \left( \frac{1}{6}f(\alpha_{i-1}) + \frac{2}{3}f(m_i) + \frac{1}{6}f(\alpha_i) \right)$  

- Les coefficients sont  $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$  et  $\omega_1 = \frac{2}{3}$ .
- Sur l'intervalle complet  $[a, b]$ , par sommation :

$$\int_a^b f(t) dt \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{6} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right) \right)$$

**Exemple : Calcul des coefficients pour  $\ell = 2$   
(Méthode de Simpson)**

- $h = \frac{b-a}{n} = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ . Notons  $m_i = \frac{\alpha_{i-1} + \alpha_i}{2}$

Sur  $[\alpha_{i-1}, \alpha_i]$ ,  $I_S = h \times \left( \frac{1}{6} f(\alpha_{i-1}) + \frac{2}{3} f(m_i) + \frac{1}{6} f(\alpha_i) \right)$  

- Les coefficients sont  $\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$  et  $\omega_1 = \frac{2}{3}$ .
- Sur l'intervalle complet  $[a, b]$ , par sommation :

$$\int_a^b f(t) dt \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{6} + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right) \right)$$

- Méthode **d'ordre 3**. 

Le calcul précédent se généralise sans problème à toutes les méthodes avec  $\ell$  pair.

## Propriété

La méthode de quadrature de Newton-Cotes de degré  $\ell$  est d'ordre  $\ell$  si  $\ell$  est impair et  $(\ell + 1)$  si  $\ell$  est pair.

↔ On s'intéresse aux méthodes d'ordre pair.

Le calcul précédent se généralise sans problème à toutes les méthodes avec  $\ell$  pair.

### Propriété

La méthode de quadrature de Newton-Cotes de degré  $\ell$  est d'ordre  $\ell$  si  $\ell$  est impair et  $(\ell + 1)$  si  $\ell$  est pair.

↪ On s'intéresse aux méthodes d'ordre pair.

Degré	Nom	coefficients
$\ell = 1$	Trapèzes	$\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$
$\ell = 2$	Simpson	$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$ ; $\omega_1 = \frac{2}{3}$
$\ell = 4$	Boole–Villarceau	$\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}$ ; $\omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}$ ; $\omega_2 = \frac{2}{15}$
$\ell = 6$	Weddle–Hardy	$\omega_0 = \omega_6 = \frac{41}{840}$ ; $\omega_1 = \omega_5 = \frac{9}{35}$ $\omega_2 = \omega_4 = \frac{9}{280}$ ; $\omega_3 = \frac{34}{105}$

Le calcul précédent se généralise sans problème à toutes les méthodes avec  $\ell$  pair.

### Propriété

La méthode de quadrature de Newton-Cotes de degré  $\ell$  est d'ordre  $\ell$  si  $\ell$  est impair et  $(\ell + 1)$  si  $\ell$  est pair.

↪ On s'intéresse aux méthodes d'ordre pair.

Degré	Nom	coefficients
$\ell = 1$	Trapèzes	$\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$
$\ell = 2$	Simpson	$\omega_0 = \omega_2 = \frac{1}{6}$ ; $\omega_1 = \frac{2}{3}$
$\ell = 4$	Boole–Villarceau	$\omega_0 = \omega_4 = \frac{7}{90}$ ; $\omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}$ ; $\omega_2 = \frac{2}{15}$
$\ell = 6$	Weddle–Hardy	$\omega_0 = \omega_6 = \frac{41}{840}$ ; $\omega_1 = \omega_5 = \frac{9}{35}$ $\omega_2 = \omega_4 = \frac{9}{280}$ ; $\omega_3 = \frac{34}{105}$

Pour  $\ell \geq 8$  des coefficients négatifs apparaissent

→ Propice aux erreurs d'arrondis

↪ Méthodes non utilisées

# Intégration numérique

## Formules d'erreurs

## Théorème

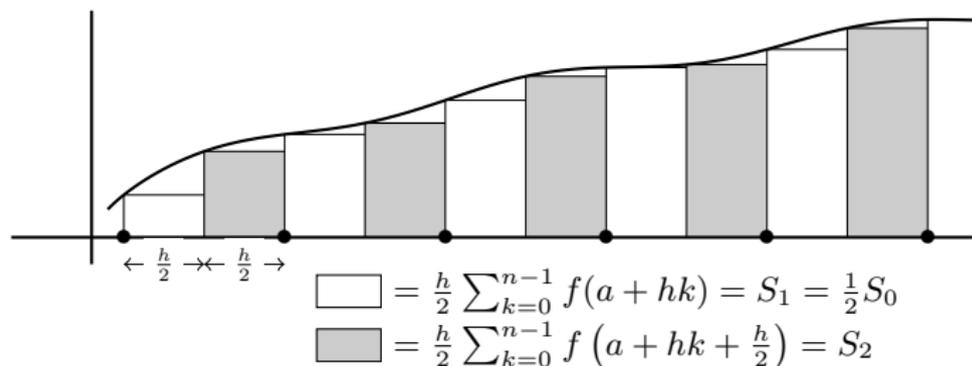
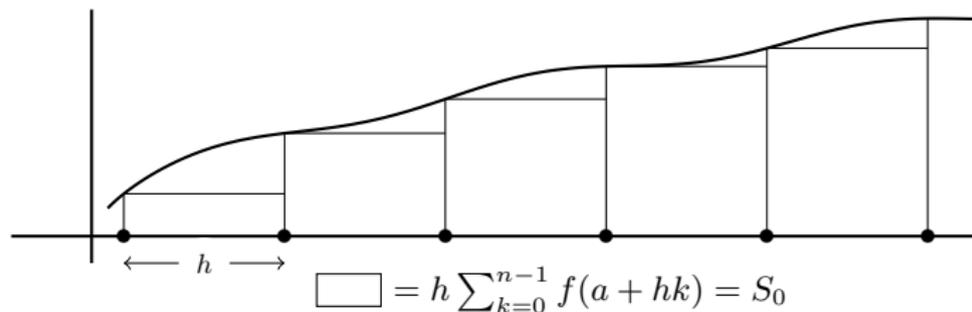
Soit  $f$  une fonction  $C^\infty$  sur  $[a, b]$ . Alors les erreurs réalisées par les différentes formules de quadrature sur la valeur de l'intégrale  $\int_a^b f(t) dt$  sont bornées par :

- Méthode des rectangles (g. ou d.) :  $K_r h \|f'\|_\infty$  
- Méthode du point milieu :  $K_m h^2 \|f^{(2)}\|_\infty$  
- Méthode des trapèzes :  $K_t h^2 \|f^{(2)}\|_\infty$
- Méthode de Simpson :  $K_s h^4 \|f^{(4)}\|_\infty$
- Méthode de Newton–Cotes de d°  $2\ell$  :  $K_l h^{2\ell+2} \|f^{(2\ell+2)}\|_\infty$

# Intégration numérique

## Méthode générale - Doublement du pas

## Exemple pour les rectangles à gauche :



Si on note  $I_{Rg}(n) = S_0$ , on a  $I_{Rg}(2n) = \frac{1}{2} S_0 + S_2$

- Méthodes des rectangles (à gauche ou à droite) :

$$I_R(2n) = \frac{1}{2}I_R(n) + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + hk + \frac{h}{2}\right)$$

- Méthode des trapèzes :

$$I_T(2n) = \frac{1}{2}I_T(n) + \frac{h}{2} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + hk + \frac{h}{2}\right)$$

- Méthode du point milieu (triplement du pas) :

$$I_{Rm}(3n) = \frac{1}{3}I_{Rm}(n) + \frac{h}{3} \sum_{k=0}^{n-1} \left( f\left(a + hk + \frac{h}{6}\right) + f\left(a + hk + \frac{5h}{6}\right) \right)$$

- Méthode de Simpson.  $I_S(n) = h \left( I_0 + \frac{1}{3}I_1(n) + \frac{2}{3}I_2(n) \right)$ , où :

$$I_0 = \frac{f(a)+f(b)}{6}; \quad I_1(n) = \sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih); \quad I_2(n) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + ih + \frac{h}{2}\right)$$

$$\rightarrow I_1(2n) = I_1(n) + I_2(n) \quad \rightarrow I_2(2n) = \sum_{i=0}^{2n-1} f\left(a + i\frac{h}{2} + \frac{h}{4}\right)$$

$$\rightarrow I_S(2n) = \frac{h}{2} \left( I_0 + \frac{1}{3}I_1(2n) + \frac{2}{3}I_2(2n) \right)$$

## Remarque 1 :

On peut procéder à une accélération de la convergence par la méthode de Romberg. (C'est le même procédé que la méthode d'accélération de la convergence de Richardson, mais appliqué à l'intégration.)

*Principe* : À partir de la formule d'Euler-Mac Laurin pour  $h$  et  $\frac{h}{2}$ , on obtient des DL en «  $h^{2k}$  ». Par une combinaison linéaire bien choisie sur les 2 formules, on peut simplifier le coefficient en «  $h^{2k}$  » ...

**Remarque 1 :**

On peut procéder à une accélération de la convergence par la méthode de Romberg. (C'est le même procédé que la méthode d'accélération de la convergence de Richardson, mais appliqué à l'intégration.)

*Principe :* À partir de la formule d'Euler-Mac Laurin pour  $h$  et  $\frac{h}{2}$ , on obtient des DL en «  $h^{2k}$  ». Par une combinaison linéaire bien choisie sur les 2 formules, on peut simplifier le coefficient en «  $h^{2k}$  » ...

*Exemple :* Pour les trapèzes, on peut passer de  $h^2$  à  $h^4$  !!!

Il suffit de réaliser le calcul suivant (à partir des calculs sur  $h$  et  $\frac{h}{2}$ ) :

$$\frac{4}{3}I_T\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}I_T(h)$$

On trouve naturellement les coefficients de la méthode de Simpson. 

**Remarque 1 :**

On peut procéder à une accélération de la convergence par la méthode de Romberg. (C'est le même procédé que la méthode d'accélération de la convergence de Richardson, mais appliqué à l'intégration.)

*Principe :* À partir de la formule d'Euler-Mac Laurin pour  $h$  et  $\frac{h}{2}$ , on obtient des DL en «  $h^{2k}$  ». Par une combinaison linéaire bien choisie sur les 2 formules, on peut simplifier le coefficient en «  $h^{2k}$  » ...

*Exemple :* Pour les trapèzes, on peut passer de  $h^2$  à  $h^4$  !!!

Il suffit de réaliser le calcul suivant (à partir des calculs sur  $h$  et  $\frac{h}{2}$ ) :

$$\frac{4}{3}I_T\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{1}{3}I_T(h)$$

On trouve naturellement les coefficients de la méthode de Simpson. 

Enfin, le procédé ne s'arrête pas forcément au premier pas, si on dispose de  $\frac{h}{4}$  ...

## Remarque 2 : (Critère d'arrêt)

La question est prégnante comme dans tout procédé convergent vers une limite inconnue.

En général, borner la distance entre 2 termes successifs est voué à l'échec car on n'est pas assuré de la convergence simplement quand 2 termes successifs sont proches.

Dans le cas de l'intégration par les méthodes de Newton–Cotes, néanmoins, ce critère sera valide.

**Remarque 2 : (Critère d'arrêt)**

La question est prégnante comme dans tout procédé convergent vers une limite inconnue.

En général, borner la distance entre 2 termes successifs est voué à l'échec car on n'est pas assuré de la convergence simplement quand 2 termes successifs sont proches.

Dans le cas de l'intégration par les méthodes de Newton–Cotes, néanmoins, ce critère sera valide.

Notons  $I_{\text{approx}}(h)$  la valeur obtenue par une méthode de Newton–Cotes avec un pas  $h$  et  $I$  la valeur limite.

Si  $\left| I_{\text{approx}}(h) - I_{\text{approx}}\left(\frac{h}{2}\right) \right| \leq \varepsilon$ , alors  $\left| I - I_{\text{approx}}\left(\frac{h}{2}\right) \right|$  est de l'ordre de  $\frac{\varepsilon}{2^p - 1}$  où  $p \geq 1$  (et donc  $\leq \varepsilon$ ). 

## Remarque 2 : (Critère d'arrêt)

La question est prégnante comme dans tout procédé convergent vers une limite inconnue.

En général, borner la distance entre 2 termes successifs est voué à l'échec car on n'est pas assuré de la convergence simplement quand 2 termes successifs sont proches.

Dans le cas de l'intégration par les méthodes de Newton–Cotes, néanmoins, ce critère sera valide.

Notons  $I_{\text{approx}}(h)$  la valeur obtenue par une méthode de Newton–Cotes avec un pas  $h$  et  $I$  la valeur limite.

Si  $\left| I_{\text{approx}}(h) - I_{\text{approx}}\left(\frac{h}{2}\right) \right| \leq \varepsilon$ , alors  $\left| I - I_{\text{approx}}\left(\frac{h}{2}\right) \right|$  est de l'ordre de  $\frac{\varepsilon}{2^p - 1}$  où  $p \geq 1$  (et donc  $\leq \varepsilon$ ). 

Pour des méthodes convergent rapidement (plus qu'en  $\mathcal{O}(h)$ ), il est préconisé de vérifier aussi la **différence relative** entre deux termes successifs.

# Intégration numérique

En dimension supérieure à 1

- Si l'on veut utiliser les mêmes méthodes, c'est-à-dire quadriller l'espace de manière plus ou moins uniforme, le domaine contiendra  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{h^n}\right)$ . Ce terme est d'autant plus important que  $h \rightarrow 0$ .  
Le nombre de calcul à faire peut très vite devenir impraticable.

- Si l'on veut utiliser les mêmes méthodes, c'est-à-dire quadriller l'espace de manière plus ou moins uniforme, le domaine contiendra  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{h^n}\right)$ . Ce terme est d'autant plus important que  $h \rightarrow 0$ .

Le nombre de calcul à faire peut très vite devenir impraticable.

- **Méthode probabiliste : Méthode de Monte-Carlo**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

On souhaite intégrer  $f$  sur un domaine  $W$  :  $\int_W f$

- On borne  $W$  dans un domaine simple  $V$  de volume  $|V|$  (hypercube, sphère, ou tout domaine pour lequel on sait calculer le volume).

- Si l'on veut utiliser les mêmes méthodes, c'est-à-dire quadriller l'espace de manière plus ou moins uniforme, le domaine contiendra  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{h^n}\right)$ . Ce terme est d'autant plus important que  $h \rightarrow 0$ .

Le nombre de calcul à faire peut très vite devenir impraticable.

- **Méthode probabiliste : Méthode de Monte-Carlo**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

On souhaite intégrer  $f$  sur un domaine  $W$  :  $\int_W f$

- On borne  $W$  dans un domaine simple  $V$  de volume  $|V|$  (hypercube, sphère, ou tout domaine pour lequel on sait calculer le volume).

- On choisit  $N$  points aléatoires dans  $V$ ,  $\Sigma = \{x_1, \dots, x_N\}$  (avec une loi de probabilité uniforme) et on enlève ceux n'appartenant pas à  $W$  :

$$\Sigma_W = \{x_i | x_i \in W\}.$$

- Si l'on veut utiliser les mêmes méthodes, c'est-à-dire quadriller l'espace de manière plus ou moins uniforme, le domaine contiendra  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{h^n}\right)$ . Ce terme est d'autant plus important que  $h \rightarrow 0$ .  
Le nombre de calcul à faire peut très vite devenir impraticable.

- **Méthode probabiliste : Méthode de Monte-Carlo**

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

On souhaite intégrer  $f$  sur un domaine  $W$  :  $\int_W f$

- On borne  $W$  dans un domaine simple  $V$  de volume  $|V|$  (hypercube, sphère, ou tout domaine pour lequel on sait calculer le volume).
- On choisit  $N$  points aléatoires dans  $V$ ,  $\Sigma = \{x_1, \dots, x_N\}$  (avec une loi de probabilité uniforme) et on enlève ceux n'appartenant pas à  $W$  :

$\Sigma_W = \{x_i | x_i \in W\}$ .

- La méthode de Monte-Carlo approxime l'intégrale de  $f$  par la moyenne des valeurs de  $f$  sur cet ensemble de points :

$$\int_W f(x) dx \approx \frac{|V|}{N} \sum_{z \in \Sigma_W} f(z)$$

## Méthode de Monte-Carlo

Convergence de l'ordre de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

→ convergence lente ... mais beaucoup moins de calcul que le quadrillage (particulièrement si  $n$  est grand).

## Méthode de Monte–Carlo

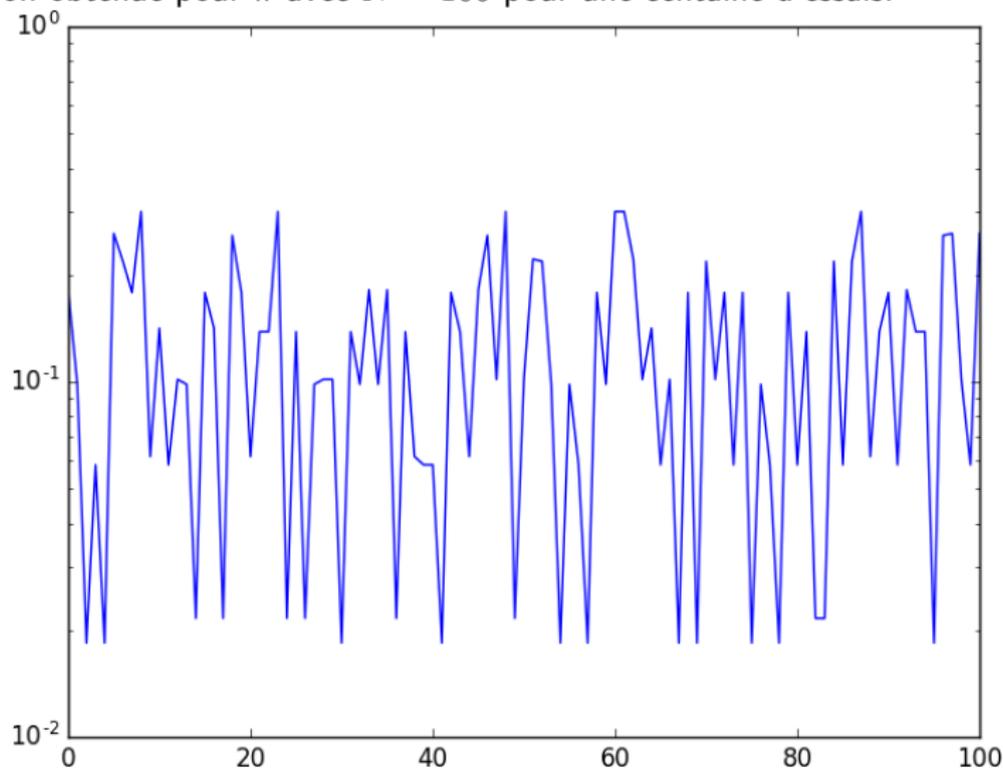
Convergence de l'ordre de  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$

→ convergence lente ... mais beaucoup moins de calcul que le quadrillage (particulièrement si  $n$  est grand).

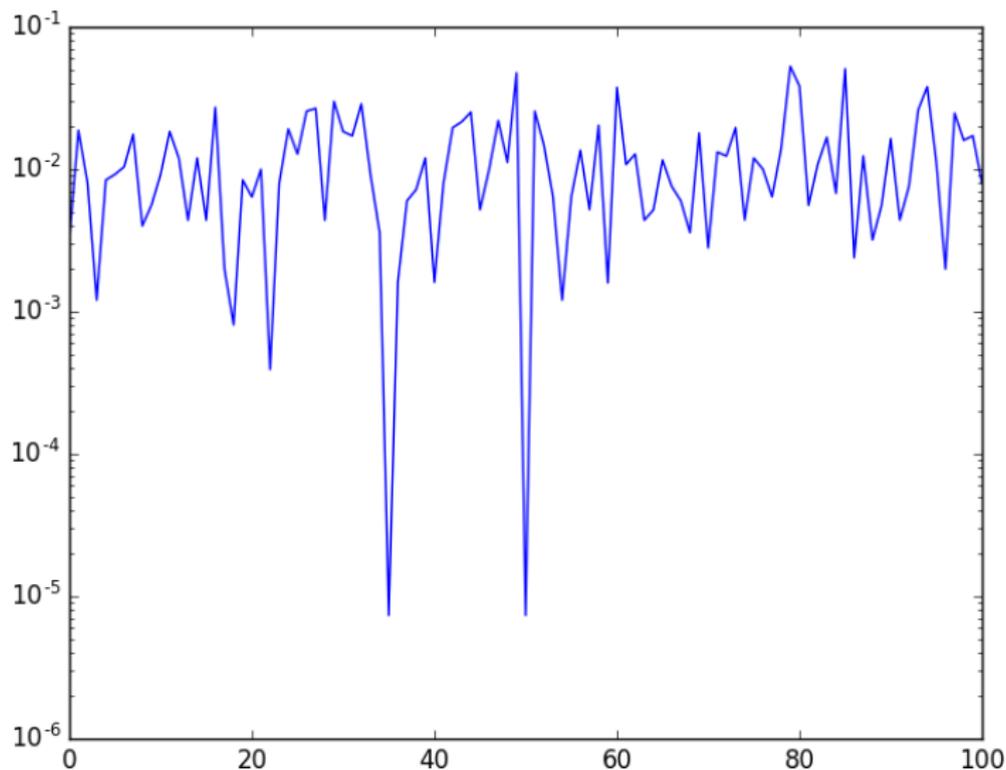
## Exemples d'utilisation

- Approximation de  $\pi$  
- Superficie d'un lac 

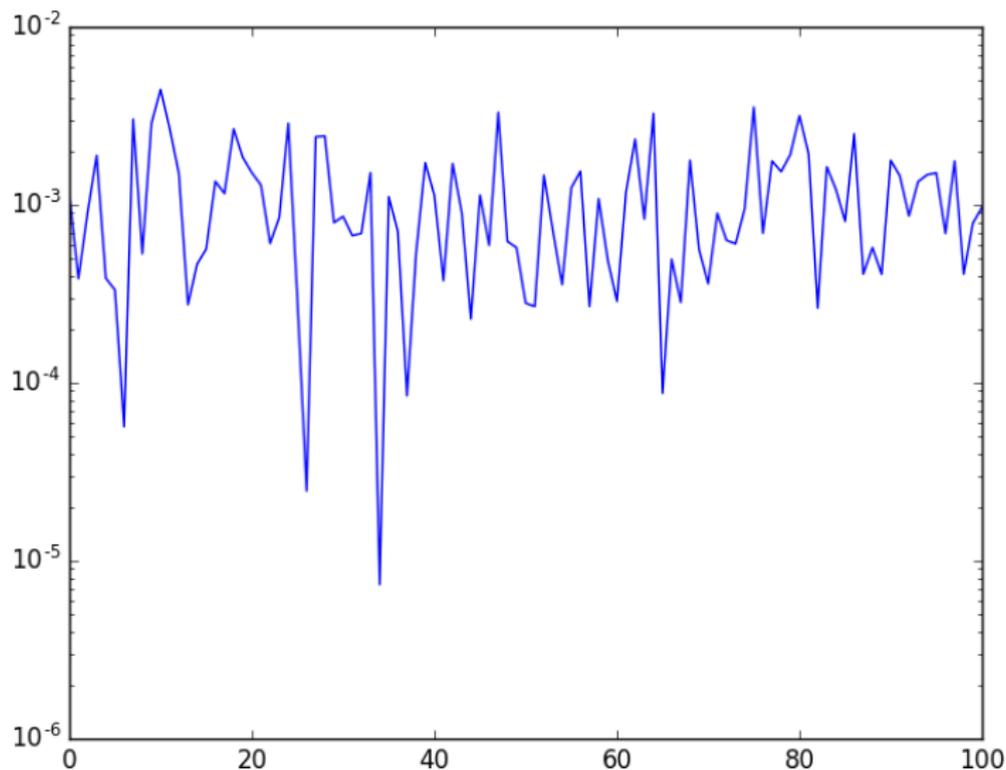
Précision obtenue pour  $\pi$  avec  $N = 100$  pour une centaine d'essais.



Précision obtenue pour  $\pi$  avec  $N = 10^4$  pour une centaine d'essais.



Précision obtenue pour  $\pi$  avec  $N = 10^6$  pour une centaine d'essais.



Précision moyenne obtenue pour  $\pi$  en fonction de  $N$ .

