

Équations différentielles

(IS104 - Algorithmique Numérique)

ENSEIRB-MATMECCA - INP Bordeaux

Semestre 6

- 1 Problématique
- 2 Approximation des solutions et 1^{ère} méthode
 - Méthode à 1 pas
 - Consistance
 - Ordre d'une méthode
 - Stabilité et convergence
- 3 Méthodes de résolution explicites
 - Méthodes de Runge-Kutta
 - Mesure de la convergence
 - Autres méthodes
- 4 Instabilité des méthodes numériques
 - Non unicité de la solution
 - Instabilité due aux conditions initiales
 - Instabilité due au schéma d'intégration
 - Instabilité due à des cumuls d'erreurs d'approximation

Problématique

Une **équation différentielle ordinaire** (EDO) est une équation du type :

$$(1) \quad \mathcal{F} (t, y, y', y'', \dots, y^{(N)}) = 0$$

où \mathcal{F} est une fonction supposée continue. ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.)

(On parle d'équation ordinaire, car l'espace de départ est de dimension 1 ...

C'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule variable, en générale temporelle.)

- Il s'agit de trouver une solution (y, I) de l'équation, avec I un intervalle de \mathbb{R} .

Une **équation différentielle ordinaire** (EDO) est une équation du type :

$$(1) \quad \mathcal{F} (t, y, y', y'', \dots, y^{(N)}) = 0$$

où \mathcal{F} est une fonction supposée continue. ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.)

(On parle d'équation ordinaire, car l'espace de départ est de dimension 1 ...

C'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule variable, en générale temporelle.)

- Il s'agit de trouver une solution (y, I) de l'équation, avec I un intervalle de \mathbb{R} .
- Le problème est sous-spécifié car il n'y a pas unicité de la solution.

Une **équation différentielle ordinaire** (EDO) est une équation du type :

$$(1) \quad \mathcal{F}(t, y, y', y'', \dots, y^{(N)}) = 0$$

où \mathcal{F} est une fonction supposée continue. ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.)

(On parle d'équation ordinaire, car l'espace de départ est de dimension 1 ...

C'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule variable, en générale temporelle.)

- Il s'agit de trouver une solution (y, I) de l'équation, avec I un intervalle de \mathbb{R} .
- Le problème est sous-spécifié car il n'y a pas unicité de la solution.
- Pour spécifier de manière plus claire le problème, on définit ce que l'on appelle un **problème de Cauchy** :

$$(2) \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 & \text{Condition initiale} \\ y' = F(t, y) & \text{Équation différentielle} \end{cases}$$

Une **équation différentielle ordinaire** (EDO) est une équation du type :

$$(1) \quad \mathcal{F} (t, y, y', y'', \dots, y^{(N)}) = 0$$

où \mathcal{F} est une fonction supposée continue. ($y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.)

(On parle d'équation ordinaire, car l'espace de départ est de dimension 1 ...

C'est-à-dire qu'il n'y a qu'une seule variable, en générale temporelle.)

- Il s'agit de trouver une solution (y, I) de l'équation, avec I un intervalle de \mathbb{R} .
- Le problème est sous-spécifié car il n'y a pas unicité de la solution.
- Pour spécifier de manière plus claire le problème, on définit ce que l'on appelle un **problème de Cauchy** :

$$(2) \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 & \text{Condition initiale} \\ y' = F(t, y) & \text{Équation différentielle} \end{cases}$$

Remarque : En exprimant $y^{(N)}$ sous la forme $y^{(N)} = \mathcal{G} (t, y, y', y'', \dots, y^{(N-1)})$, on peut facilement à partir de (1) se ramener à (2). 

Une **solution** à un problème de Cauchy sur un intervalle I contenant t_0 est une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue et dérivable sur I et telle que :

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = F(t, y(t))$$

- **Note** : y est une fonction **vectorielle**. Pour toute la suite, même si ce n'est pas rappelé à chaque fois, on considérera toujours une fonction y vectorielle (à valeurs dans \mathbb{R}^n).
- Le problème étant alors de trouver une solution maximale (c'est-à-dire avec le plus « grand » intervalle I possible).
- En partant d'une solution, on essaye de prolonger « à gauche » et « à droite »

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Si F est localement lipschitzienne en la variable y , alors pour toute condition initiale (t_0, y_0) , il existe un intervalle I_0 centré en t_0 et une solution y au problème de Cauchy définie sur I_0 .

De plus cette solution est unique (toute autre solution z est telle que $z|_{I_0} = y$).

- **Remarque** : Les fonctions \mathcal{C}^1 sont localement lipschitziennes.

Approximation des solutions et 1^{ère} méthode

On se donne un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 & \text{Condition initiale} \\ y' = F(t, y) & \text{Équation différentielle} \end{cases}$$

On définit alors le champ des tangentes par : $(t, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto F(t, y) \in \mathbb{R}^n$

Exemple en dimension 1

$$(E) \quad y'(t) = \frac{y(t)}{1+t^2}$$

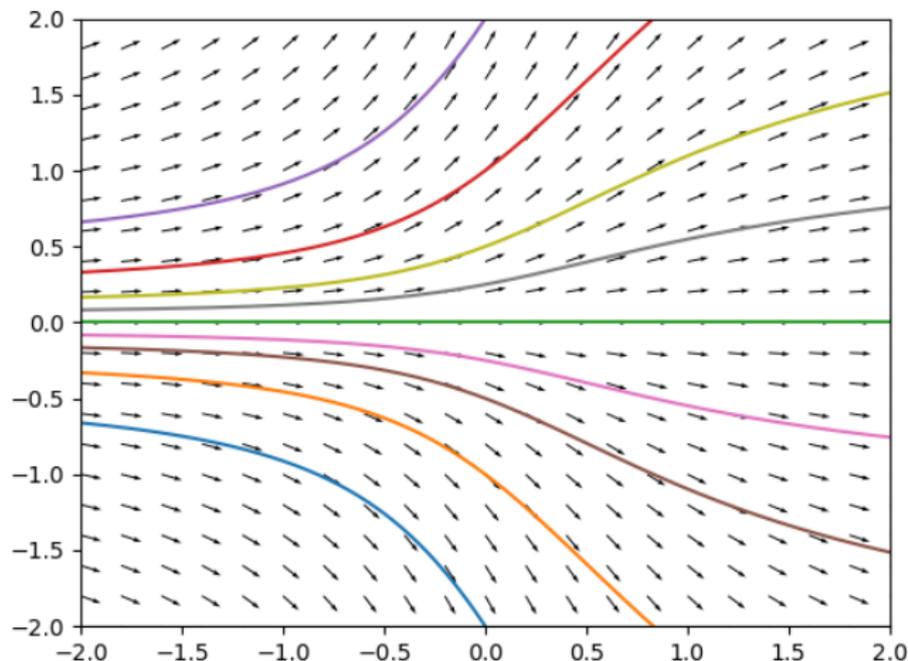
- Champ des tangentes : $(t, y) \mapsto F(t, y) = \frac{y}{1+t^2}$
- En dimension 1, on peut représenter le vecteur tangente au point $(t, y(t))$: c'est le vecteur de coordonnées $(1, F(t, y(t)))$ ou sous forme normalisée

$$\frac{1}{\sqrt{1+F^2(t, y(t))}} (1, F(t, y(t)))$$

- Solutions : $y(t) = Ke^{\arctan(t)}$ (sur \mathbb{R})



Champ des tangentes de (E) $y' = y/(1+t^2)$ (dimension 1)
 et solutions de (E) pour différentes conditions initiales



Exemple en dimension 2

$$(E) \quad \vec{y}'(t) = (-y_2(t); y_1(t)) \quad \text{avec} \quad \vec{y}(t) = (y_1(t); y_2(t))$$

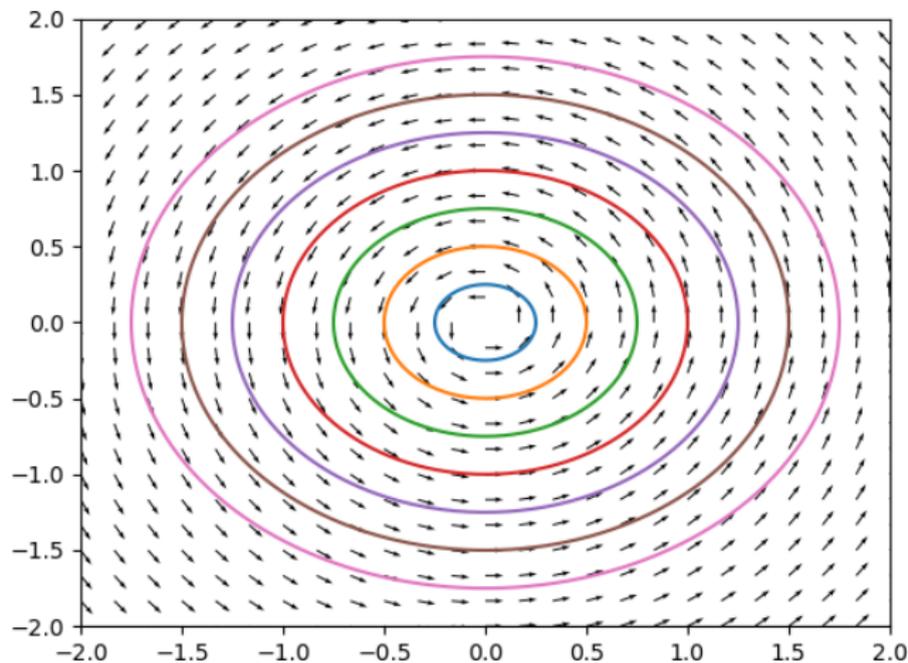
- Champ des tangentes : $(t; (y_1, y_2)) \mapsto (-y_2, y_1)$
(ou sous forme normalisée $\frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}(-y_2, y_1)$)
- En dimension 2, pour des EDO autonomes (ce qui est le cas de cet exemple), on peut représenter le vecteur dérivé $\vec{y}' = (y_1', y_2')$ pour chaque point (y_1, y_2) (indépendamment de t).

Ici, au point (y_1, y_2) : $\vec{y}' = (-y_2, y_1)$.

- Solutions : 

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= (A \cos(t) + B \sin(t); A \sin(t) - B \cos(t)) \quad (\text{sur } \mathbb{R}) \\ &= \rho (\cos(t + \varphi); \sin(t + \varphi)) \end{aligned}$$

Champ des tangentes de (E) $(y'_1; y'_2) = (-y_2; y_1)$ (dimension 2)
et solutions de (E) pour différentes conditions initiales



Principe de la méthode

On part d'un point sur la « courbe » et on suit une approximation de la solution y sur un faible intervalle pour avoir le point suivant.

On va ainsi « tabuler » la fonction y en des points $\{t_0, \dots, t_n\}$ par des valeurs $y_k \approx y(t_k)$.

A partir du point $(t_n, y_n = y(t_n))$, on construit l'image de $t_{n+1} = t_n + h_n$ avec une méthode d'intégration de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \\ \quad \text{(Méthode à un pas)} \\ \text{ou} \\ (p) \quad y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, \dots, t_{n-k}, y_n, \dots, y_{n-k}, h_n) \\ \quad \text{(Méthode à plusieurs pas)} \end{array} \right.$$

Méthode d'Euler - Méthode à 1 pas

- Équation différentielle : $y' = F(t, y)$
- Choix de ϕ : On fait l'hypothèse que la fonction est approximativement affine au point y_n et on suit le vecteur tangent pour trouver le point suivant.

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(t_n, y_n)$$

Méthode d'Euler - Méthode à 1 pas

- Équation différentielle : $y' = F(t, y)$
- Choix de ϕ : On fait l'hypothèse que la fonction est approximativement affine au point y_n et on suit le vecteur tangent pour trouver le point suivant.

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(t_n, y_n)$$

- Cela revient à utiliser la méthode d'intégration des rectangles à gauche :

$$\blacktriangleright y(t_{n+1}) - y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t) dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

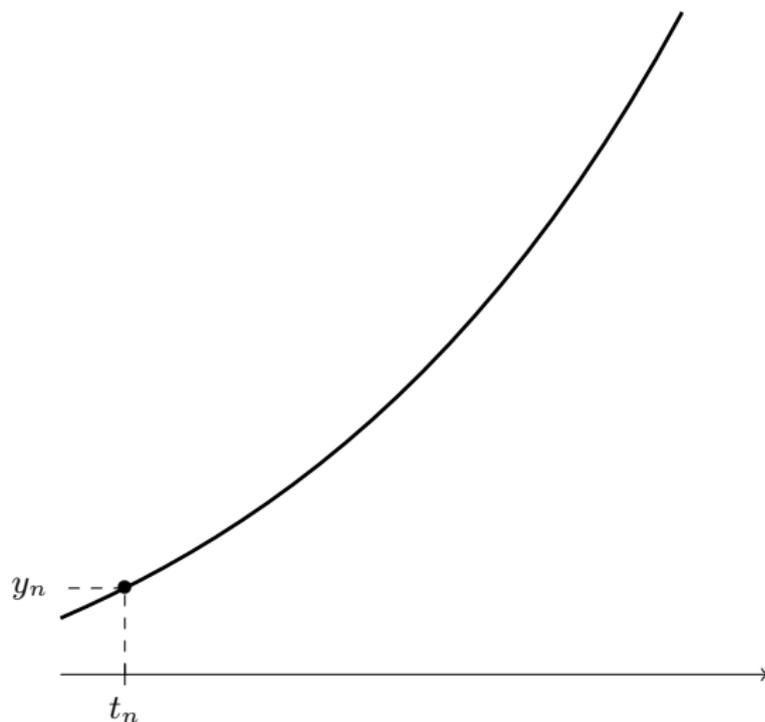
- ▶ On utilise la méthode des rectangles (à gauche) pour obtenir une valeur approchée :

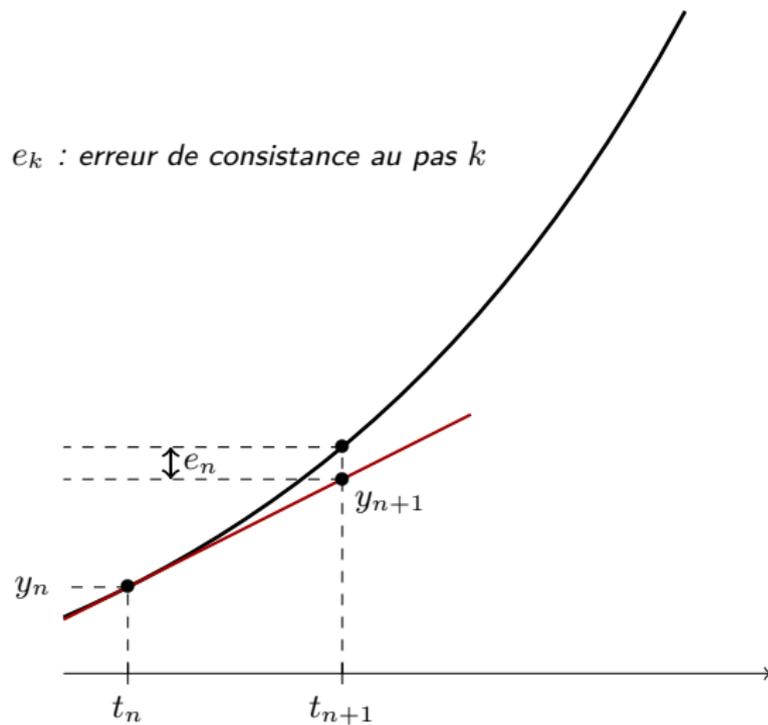
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt \approx (t_{n+1} - t_n) F(t_n, y(t_n))$$

- ▶ Donc $y(t_{n+1}) - y(t_n) \approx h_n F(t_n, y(t_n))$

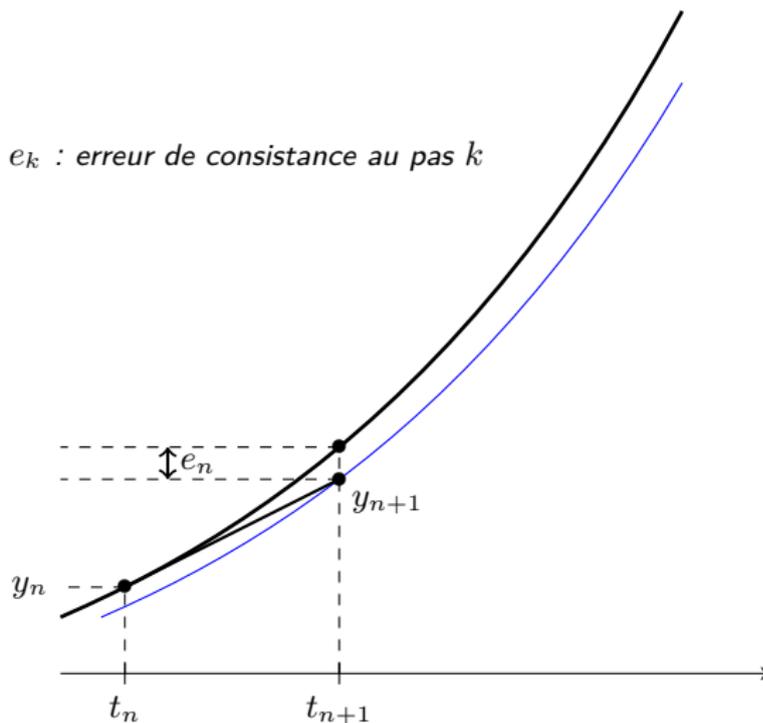
On définit donc la suite par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(t_n, y_n)$$

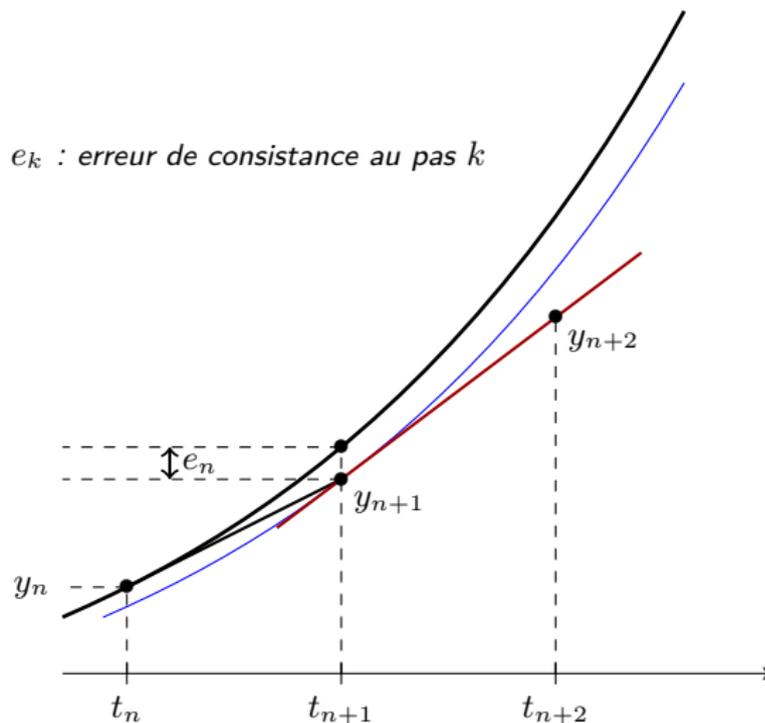


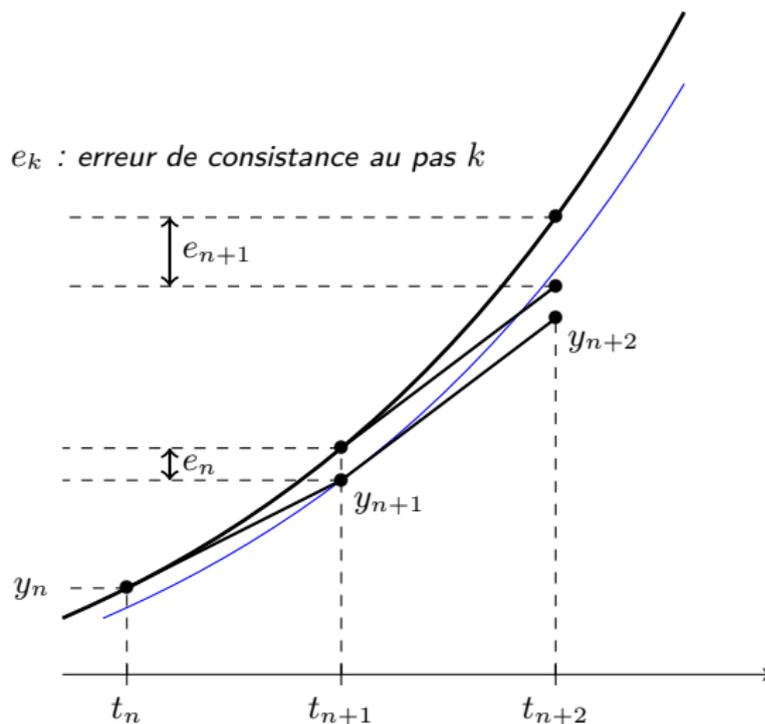


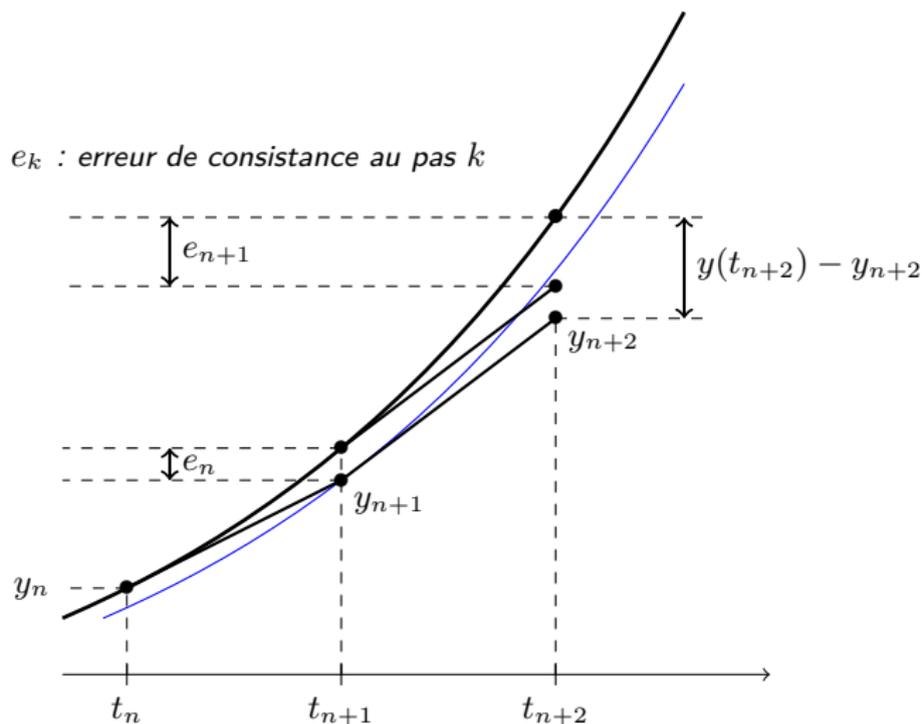
e_k : erreur de consistance au pas k



e_k : erreur de consistance au pas k







Erreur de consistance

On appelle erreur de consistance relative à une solution exacte au pas n la différence entre la valeur exacte donnée par la solution en t_{n+1} et la valeur obtenue par la méthode d'intégration à partir de $(t_n, y(t_n))$.

Si $y_{n+1} = y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)$, l'erreur de consistance est :

$$e_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

Erreur de consistance

On appelle erreur de consistance relative à une solution exacte au pas n la différence entre la valeur exacte donnée par la solution en t_{n+1} et la valeur obtenue par la méthode d'intégration à partir de $(t_n, y(t_n))$.

Si $y_{n+1} = y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)$, l'erreur de consistance est :

$$e_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

- Pour la méthode d'Euler (avec F suffisamment dérivable) :

$$e_n = \frac{1}{2} h_n^2 y''(t_n) + o(h_n^2)$$

$$\text{avec } y''(t) = (F'_x + F'_y \cdot F)(t, y(t))$$



L'erreur de consistance est bornée par les variations de F et de ses dérivées, et par un facteur en $\mathcal{O}(h_n^2)$.

Erreur de consistance

On appelle erreur de consistance relative à une solution exacte au pas n la différence entre la valeur exacte donnée par la solution en t_{n+1} et la valeur obtenue par la méthode d'intégration à partir de $(t_n, y(t_n))$.

Si $y_{n+1} = y(t_n) + h_n \phi(t_n, y(t_n), h_n)$, l'erreur de consistance est :

$$e_n = y(t_{n+1}) - y_{n+1}$$

- Pour la méthode d'Euler (avec F suffisamment dérivable) :

$$e_n = \frac{1}{2} h_n^2 y''(t_n) + o(h_n^2)$$

$$\text{avec } y''(t) = (F'_x + F'_y \cdot F)(t, y(t))$$



L'erreur de consistance est bornée par les variations de F et de ses dérivées, et par un facteur en $\mathcal{O}(h_n^2)$.

- Les $\|e_n\|$ sont des erreurs locales de « méthode ». Ces erreurs ne sont pas à priori représentative de l'erreur globale.

On peut imaginer sous réserves d'hypothèses convenables de régularité que

l'erreur globale sera de l'ordre de la somme des erreurs locales $\sum_{i=0}^{N-1} \|e_i\|$.

Consistance

Par simple translation, on peut se ramener d'un intervalle $[a, b]$ à un intervalle du type $[0, T]$. On se place donc sur un intervalle $[0, T]$.

On réalise une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note $h_k = t_{k+1} - t_k$, et $h_{\max} = \max_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket} h_k$.

Définition

Une méthode est dite consistante si pour toute solution exacte y ,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|e_i\| \xrightarrow{h_{\max} \rightarrow 0} 0$$

C'est-à-dire que la méthode d'intégration calcule bien une solution de l'équation différentielle.

Consistance

Par simple translation, on peut se ramener d'un intervalle $[a, b]$ à un intervalle du type $[0, T]$. On se place donc sur un intervalle $[0, T]$.

On réalise une subdivision $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note $h_k = t_{k+1} - t_k$, et $h_{\max} = \max_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket} h_k$.

Définition

Une méthode est dite consistante si pour toute solution exacte y ,

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|e_i\| \xrightarrow{h_{\max} \rightarrow 0} 0$$

C'est-à-dire que la méthode d'intégration calcule bien une solution de l'équation différentielle.

Propriété : La méthode d'Euler est consistante.



Ordre d'une méthode

Définition

- Une méthode est d'ordre $\geq p$ si et seulement si pour toute solution exacte de $y' = F(t, y)$ où F est de classe C^p , il existe $C > 0$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, $\|e_k\| \leq Ch_k^{p+1}$.
- Une méthode est dite d'ordre p si et seulement si elle est d'ordre $\geq p$ mais pas d'ordre $\geq p + 1$.

Lorsque F est dérivable, la méthode d'Euler est d'ordre 1.

Une méthode d'ordre $\geq p$ est consistante et vérifie $\sum \|e_k\| \leq Kh_{\max}^p$.



Stabilité et convergence

Stabilité

Une méthode est dite stable si et seulement si il existe une constante S appelée constante de stabilité telle que, pour (y_n) et (\tilde{y}_n) définies par :

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n\end{aligned}$$

Alors,
$$\max_{0 \leq k \leq N} \|y_k - \tilde{y}_k\| \leq S \left(\|y_0 - \tilde{y}_0\| + \sum_{k=0}^{N-1} \|\varepsilon_k\| \right)$$

(C'est-à-dire, quitte à rajouter des erreurs à chaque étape, globalement l'erreur reste bornée linéairement en la somme des erreurs locales.)

Stabilité et convergence

Stabilité

Une méthode est dite stable si et seulement si il existe une constante S appelée constante de stabilité telle que, pour (y_n) et (\tilde{y}_n) définies par :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Alors,
$$\max_{0 \leq k \leq N} \|y_k - \tilde{y}_k\| \leq S \left(\|y_0 - \tilde{y}_0\| + \sum_{k=0}^{N-1} \|\varepsilon_k\| \right)$$

(C'est-à-dire, quitte à rajouter des erreurs à chaque étape, globalement l'erreur reste bornée linéairement en la somme des erreurs locales.)

Remarque : Si ϕ est lipschitzienne alors la méthode est stable.



Stabilité et convergence

Stabilité

Une méthode est dite stable si et seulement si il existe une constante S appelée constante de stabilité telle que, pour (y_n) et (\tilde{y}_n) définies par :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \\ \tilde{y}_{n+1} &= \tilde{y}_n + h_n \phi(t_n, \tilde{y}_n, h_n) + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Alors,
$$\max_{0 \leq k \leq N} \|y_k - \tilde{y}_k\| \leq S \left(\|y_0 - \tilde{y}_0\| + \sum_{k=0}^{N-1} \|\varepsilon_k\| \right)$$

(C'est-à-dire, quitte à rajouter des erreurs à chaque étape, globalement l'erreur reste bornée linéairement en la somme des erreurs locales.)

Remarque : Si ϕ est lipschitzienne alors la méthode est stable. 

Propriété : Si F est lipschitzienne, la méthode d'Euler est stable.

Convergence

Une méthode d'intégration est dite convergente si et seulement si pour toute solution exacte y sur $[0, T]$, la suite (y_n) définie par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$$

est telle que

$$\max_n \|y_n - y(t_n)\| \xrightarrow{\begin{cases} h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0) \end{cases}} 0$$

Convergence

Une méthode d'intégration est dite convergente si et seulement si pour toute solution exacte y sur $[0, T]$, la suite (y_n) définie par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$$

est telle que

$$\max_n \|y_n - y(t_n)\| \xrightarrow{\begin{cases} h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0) \end{cases}} 0$$

Théorème : La méthode d'Euler est convergente.



Convergence

Une méthode d'intégration est dite convergente si et seulement si pour toute solution exacte y sur $[0, T]$, la suite (y_n) définie par :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n)$$

est telle que

$$\max_n \|y_n - y(t_n)\| \xrightarrow{\begin{cases} h_{\max} \rightarrow 0 \\ y_0 \rightarrow y(t_0) \end{cases}} 0$$

Théorème : La méthode d'Euler est convergente.



Propriété :

Si une méthode d'ordre $\geq p$ est stable, alors l'erreur globale est en $\mathcal{O}(h_{\max}^p)$.

(Propriété immédiate car pour une méthode d'ordre $\geq p$, $\sum \|e_k\| \leq Ch_{\max}^p$.)

Remarque sur le critère d'arrêt (par anticipation) :

- Pour la mise en œuvre de la méthode d'Euler, on travaille en général avec un pas constant $h_N = \frac{b-a}{N}$ (avec une subdivision de $[a, b]$ en N intervalles) pour lequel on calcule la suite des valeurs « tabulée » y^N .
- On calcule ensuite y^{2N} (pour $h_{2N} = \frac{b-a}{2N} = \frac{h_N}{2}$, méthode du doublement du pas).
- On arrête les itérations dès que $\|y^N - y^{2N}\|_\infty \leq \varepsilon$.
(Justification du critère d'arrêt plus tard.)



On ne compare y^N et y^{2N} que sur les points communs, c'est-à-dire ceux de y^N .

Méthodes de résolution explicites

Méthodes de Runge-Kutta

Principe

On se ramène à un problème d'intégration. En effet de l'équation $y' = F(t, y)$, on tire :

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

Principe

On se ramène à un problème d'intégration. En effet de l'équation $y' = F(t, y)$, on tire :

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

Ou encore avec le changement de variable $t = t_n + xh_n$:
(rappel : $h_n = t_{n+1} - t_n$)

$$y_{n+1} = y_n + h_n \int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx$$

Principe

On se ramène à un problème d'intégration. En effet de l'équation $y' = F(t, y)$, on tire :

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

Ou encore avec le changement de variable $t = t_n + xh_n$:
(rappel : $h_n = t_{n+1} - t_n$)

$$y_{n+1} = y_n + h_n \int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx$$

Il ne reste plus qu'à évaluer $F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n))$ pour des valeurs $x \in [0, 1]$ et d'appliquer les méthodes du projet précédent.

Principe

On se ramène à un problème d'intégration. En effet de l'équation $y' = F(t, y)$, on tire :

$$y_{n+1} - y_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(t, y(t)) dt$$

Ou encore avec le changement de variable $t = t_n + xh_n$:
(rappel : $h_n = t_{n+1} - t_n$)

$$y_{n+1} = y_n + h_n \int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx$$

Il ne reste plus qu'à évaluer $F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n))$ pour des valeurs $x \in [0, 1]$ et d'appliquer les méthodes du projet précédent.

Exemple : Méthode des rectangles à gauche

On évalue $F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n))$ en $x = 0$.

On obtient la **méthode d'Euler** :

$$y_{n+1} = y_n + h_n F(t_n, y(t_n)) = y_n + h_n F(t_n, y_n)$$

Méthode du point milieu

On évalue $F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n))$ en $x = \frac{1}{2}$.

On obtient : $y_{n+1} = y_n + h_n F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right)$

Ou encore, on fait l'approximation : $y(t+h) \approx y(t) + hy'(t + \frac{h}{2})$

La méthode est d'ordre 2



Méthode du point milieu

On évalue $F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n))$ en $x = \frac{1}{2}$.

On obtient : $y_{n+1} = y_n + h_n F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)\right)$

Ou encore, on fait l'approximation : $y(t+h) \approx y(t) + hy'(t + \frac{h}{2})$

La méthode est d'ordre 2



Néanmoins se pose le problème de l'évaluation de $y(t_n + \frac{h_n}{2})$:

On choisit d'évaluer $y_{n+\frac{1}{2}} \approx y(t_n + \frac{h_n}{2})$ avec un demi-pas de la méthode d'Euler. La dérivée (ou F') est ensuite évaluée en ce point.

Malgré cette approximation, la méthode reste d'ordre 2.

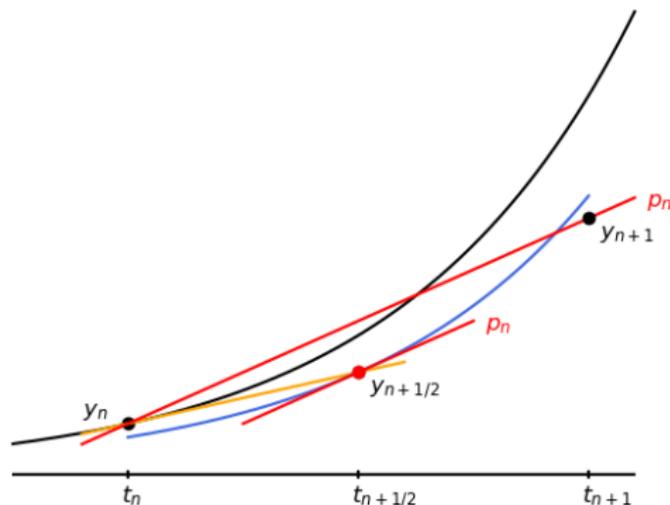
Méthode du point milieu

ordre 2

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h_n}{2} F(t_n, y_n) \\ p_n = F\left(t_n + \frac{h_n}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}\right) \\ y_{n+1} = y_n + h_n p_n \end{cases}$$

Méthode du point milieu

Illustration de la méthode en dimension 1



Méthode de Heun

Cette méthode correspond à la méthode des trapèzes.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

Méthode de Heun

Cette méthode correspond à la méthode des trapèzes.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

$$\text{On obtient donc } y_{n+1} = y_n + h_n \frac{F(t_n, y_n) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

$$\text{Ou encore, on fait l'approximation : } y(t+h) \approx y(t) + h \frac{y'(t) + y'(t+h)}{2}$$

La méthode est d'ordre 2



Méthode de Heun

Cette méthode correspond à la méthode des trapèzes.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

$$\text{On obtient donc } y_{n+1} = y_n + h_n \frac{F(t_n, y_n) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

$$\text{Ou encore, on fait l'approximation : } y(t+h) \approx y(t) + h \frac{y'(t) + y'(t+h)}{2}$$

La méthode est d'ordre 2



Se pose le problème de l'évaluation de $y(t_{n+1})$. On choisit de l'évaluer avec un pas de la méthode d'Euler à partir de y_n .

(Malgré cette approximation, la méthode reste d'ordre 2.)

Méthode de Heun

Cette méthode correspond à la méthode des trapèzes.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{F(t_n, y(t_n)) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$$

On obtient donc $y_{n+1} = y_n + h_n \frac{F(t_n, y_n) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1}))}{2}$

Ou encore, on fait l'approximation : $y(t+h) \approx y(t) + h \frac{y'(t) + y'(t+h)}{2}$

La méthode est d'ordre 2



Se pose le problème de l'évaluation de $y(t_{n+1})$. On choisit de l'évaluer avec un pas de la méthode d'Euler à partir de y_n .

(Malgré cette approximation, la méthode reste d'ordre 2.)

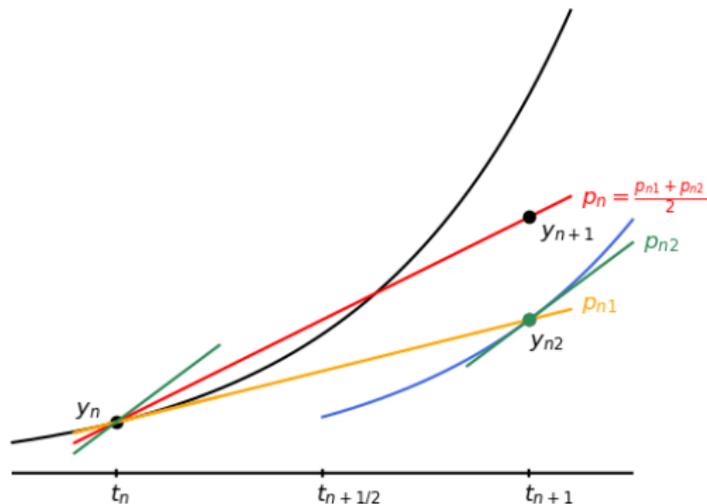
Méthode de Heun

ordre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n1} = F(t_n, y_n) \\ y_{n2} = y_n + h_n p_{n1} \\ p_{n2} = F(t_n + h_n, y_{n2}) \\ y_{n+1} = y_n + h_n \frac{p_{n1} + p_{n2}}{2} \end{array} \right.$$

Méthode de Heun

Illustration de la méthode en dimension 1



Méthode de Runge Kutta 4 (RK4)

Cette méthode correspond à la méthode de Simpson.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{1}{6} \left\{ F(t_n, y(t_n)) + 4F\left(t_n + \frac{1}{2}, y\left(t_n + \frac{1}{2}\right)\right) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$$

Méthode de Runge Kutta 4 (RK4)

Cette méthode correspond à la méthode de Simpson.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{1}{6} \left\{ F(t_n, y(t_n)) + 4F\left(t_n + \frac{1}{2}, y\left(t_n + \frac{1}{2}\right)\right) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$$

On obtient donc $y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{6} \left\{ F(t_n, y(t_n)) + 4F\left(t_n + \frac{1}{2}, y\left(t_n + \frac{1}{2}\right)\right) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$

On fait l'approximation : $y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{6} \left(y'(t) + 4y'\left(t + \frac{h}{2}\right) + y'(t+h) \right)$

La méthode est d'ordre 4



Méthode de Runge Kutta 4 (RK4)

Cette méthode correspond à la méthode de Simpson.

$$\int_0^1 F(t_n + xh_n, y(t_n + xh_n)) dx \approx \frac{1}{6} \left\{ F(t_n, y(t_n)) + 4F\left(t_n + \frac{1}{2}, y\left(t_n + \frac{1}{2}\right)\right) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$$

On obtient donc $y_{n+1} = y_n + \frac{h_n}{6} \left\{ F(t_n, y(t_n)) + 4F\left(t_n + \frac{1}{2}, y\left(t_n + \frac{1}{2}\right)\right) + F(t_{n+1}, y(t_{n+1})) \right\}$

On fait l'approximation : $y(t+h) \approx y(t) + \frac{h}{6} \left(y'(t) + 4y'\left(t + \frac{h}{2}\right) + y'(t+h) \right)$

La méthode est d'ordre 4



Se pose le problème de l'évaluation de $y(t_{n+1})$ et de $y\left(t_n + \frac{h_n}{2}\right)$ que l'on obtient par des approximations. Malgré cela, la méthode reste d'ordre 4.

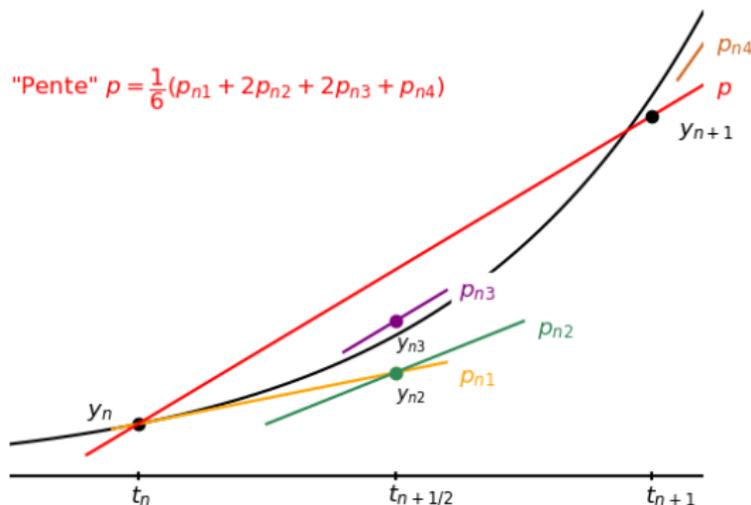
Méthode de Runge Kutta 4

ordre 4

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{n1} = F(t_n, y_n) \\ y_{n2} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n1} \\ p_{n2} = F\left(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_{n2}\right) \\ y_{n3} = y_n + \frac{1}{2}h_n p_{n2} \\ p_{n3} = F\left(t_n + \frac{1}{2}h_n, y_{n3}\right) \\ y_{n4} = y_n + h_n p_{n3} \\ p_{n4} = F(t_n + h_n, y_{n4}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h_n (p_{n1} + 2p_{n2} + 2p_{n3} + p_{n4}) \end{array} \right.$$

Méthode de Runge Kutta 4 (RK4)

Illustration de la méthode en dimension 1



Méthodes de résolution explicites

Mesure de la convergence

Par simple translation, on peut se ramener d'un intervalle $[a, b]$ à un intervalle du type $[0, T]$.

On se place donc sur $[0, T]$:
$$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \text{ (avec } t_0 = 0) \\ y' = F(t, y) \end{cases}$$

On se place de plus dans le cadre d'un pas constant :

$$h = \frac{T}{N} \quad \text{et} \quad t_k = k \frac{T}{N} \quad (N \geq 1)$$

Critère d'arrêt :

(Même heuristique que pour l'intégration.)



- On double le pas à chaque étape.
On calcule donc y^N (pour un pas h) et y^{2N} (avec un pas $\frac{h}{2}$).
- On arrête les itérations dès que $\|y^N - y^{2N}\|_\infty \leq \varepsilon$.



On ne compare y^N et y^{2N} que sur les points communs, c'est-à-dire ceux de y^N , donc en $t_k = k \frac{T}{N}$.

Contrairement à l'intégration, on ne peut pas ici utiliser les calculs précédents car les résultats sont différents suivant le pas.

Autres méthodes

(Non développées)

- À pas adaptatif
- À base d'interpolation
- Méthodes stochastiques (probas)

Référence : **Numerical Recipes in C**

Instabilité des méthodes numériques

Non unicité de la solution vis-à-vis de la condition initiale

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} & t \in [0, +\infty[\\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions maximales sont la fonction nulle et les solutions du type

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{sur } [0, a] \\ y(t) = (t - a)^2 & \text{sur } [a, +\infty[\end{cases} \quad \text{pour tout } a \in [0, +\infty[.$$

Il n'y a donc pas unicité de la solution.

Non unicité de la solution vis-à-vis de la condition initiale

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|} & t \in [0, +\infty[\\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions maximales sont la fonction nulle et les solutions du type

$$\begin{cases} y(t) = 0 & \text{sur } [0, a] \\ y(t) = (t - a)^2 & \text{sur } [a, +\infty[\end{cases} \quad \text{pour tout } a \in [0, +\infty[.$$

Il n'y a donc pas unicité de la solution.

En appliquant la méthode d'Euler : $y_{n+1} = y_n + 2h_n\sqrt{y_n}$

- Avec $y_0 = 0$. On obtient $y(t) = 0$
- Avec $y_0 = \varepsilon$. On obtient $y(t) \approx (t + \sqrt{\varepsilon})^2$. Par passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $y_{\lim}(t) = t^2 \dots$

Ainsi la solution obtenue (ou plutôt son approximation) ne dépend pas continûment de la donnée initiale $\triangle! \triangle! \triangle!$

Instabilité due aux conditions initiales

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 3y - 1 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Dans ce cas, il y a unicité de la solution mathématique.

(On n'a donc pas le problème du cas précédent.)

- ① Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera y .

Instabilité due aux conditions initiales

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 3y - 1 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Dans ce cas, il y a unicité de la solution mathématique.

(On n'a donc pas le problème du cas précédent.)

- ① Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera y .
- ② On commet initialement (inévitavelmente) une erreur d'approximation ε pour $\frac{1}{3}$ (erreur d'arrondi). Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera \tilde{y} , correspondant à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$.

Instabilité due aux conditions initiales

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 3y - 1 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Dans ce cas, il y a unicité de la solution mathématique.

(On n'a donc pas le problème du cas précédent.)

- ① Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera y .
- ② On commet initialement (inévitavelmente) une erreur d'approximation ε pour (erreur d'arrondi). Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera \tilde{y} , correspondant à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$.
- ③ Donner alors l'écart entre ces deux solutions (exactes) pour $t = 10$:
 $E_{10} = |\tilde{y}(10) - y(10)|$

Instabilité due aux conditions initiales

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 3y - 1 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Dans ce cas, il y a unicité de la solution mathématique.

(On n'a donc pas le problème du cas précédent.)

- ① Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera y .
- ② On commet initialement (inévitavelmente) une erreur d'approximation ε pour $\frac{1}{3}$ (erreur d'arrondi). Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera \tilde{y} , correspondant à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$.
- ③ Donner alors l'écart entre ces deux solutions (exactes) pour $t = 10$: $E_{10} = |\tilde{y}(10) - y(10)|$
- ④ Application numérique : Quelle est l'erreur commise si l'approximation de départ est à 10^{-10} ? Quelle précision faut-il au départ si on veut une précision finale à 10^{-7} ? ($e^{30} \approx 10^{13}$)

Instabilité due aux conditions initiales

Exemple :
$$\begin{cases} y' = 3y - 1 \\ y(0) = \frac{1}{3} \end{cases} \quad t \in [0, 10]$$

Dans ce cas, il y a unicité de la solution mathématique.

(On n'a donc pas le problème du cas précédent.)

- ① Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera y .
- ② On commet initialement (inévitavelmente) une erreur d'approximation ε pour $\frac{1}{3}$ (erreur d'arrondi). Calculer la solution mathématique exacte, que l'on notera \tilde{y} , correspondant à la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3} + \varepsilon$.
- ③ Donner alors l'écart entre ces deux solutions (exactes) pour $t = 10$: $E_{10} = |\tilde{y}(10) - y(10)|$
- ④ Application numérique : Quelle est l'erreur commise si l'approximation de départ est à 10^{-10} ? Quelle précision faut-il au départ si on veut une précision finale à 10^{-7} ? ($e^{30} \approx 10^{13}$)

Remarque : Les calculs ne prennent en compte que l'écart entre les solutions exactes ...

Sachant que notre méthode ne calculera que des approximations 

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

① Vérifier que la solution mathématique exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

- ① Vérifier que la solution mathématique exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.
- ② Calculer la solution mathématique, que l'on notera \tilde{y} , pour la condition initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$ (*erreur d'approximation ε au départ*).

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

- ① Vérifier que la solution mathématique exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.
- ② Calculer la solution mathématique, que l'on notera \tilde{y} , pour la condition initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$ (*erreur d'approximation ε au départ*).
- ③ Donner alors l'écart entre ces deux solutions (exactes) pour $t = 1$: $|\tilde{y}(1) - y(1)|$. Que peut-on en conclure ?

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

- ① Vérifier que la solution mathématique exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.
- ② Calculer la solution mathématique, que l'on notera \tilde{y} , pour la condition initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$ (erreur d'approximation ε au départ).
- ③ Donner alors l'écart entre ces deux solutions (exactes) pour $t = 1$: $|\tilde{y}(1) - y(1)|$. Que peut-on en conclure ?
- ④ On applique la méthode d'Euler avec un pas h . Notons E_n l'erreur commise au rang n par rapport à la solution exacte : $E_n = y_n - \frac{1}{5}$.
Exprimer E_{n+1} en fonction de E_n , puis E_n en fonction de y_0 , h et n .

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

- ① Vérifier que la solution mathématique exacte est $y(t) = \frac{1}{5}$.
- ② Calculer la solution mathématique, que l'on notera \tilde{y} , pour la condition initiale $y(0) = \frac{1}{5} + \varepsilon$ (erreur d'approximation ε au départ).
- ③ Donner alors l'écart entre ces deux solutions (exactes) pour $t = 1$: $|\tilde{y}(1) - y(1)|$. Que peut-on en conclure ?
- ④ On applique la méthode d'Euler avec un pas h . Notons E_n l'erreur commise au rang n par rapport à la solution exacte : $E_n = y_n - \frac{1}{5}$.
Exprimer E_{n+1} en fonction de E_n , puis E_n en fonction de y_0 , h et n .
- ⑤ Prenons un pas $h = \frac{1}{50}$. Pour une erreur ε au départ, donner alors l'erreur commise dans l'évaluation en $t = 1$ (c'est-à-dire E_{50}). Conclusion ?

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

⑥ Quel pas h faut-il choisir pour qu'il n'y ait pas divergence ?

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

⑥ Quel pas h faut-il choisir pour qu'il n'y ait pas divergence ?

Conclusion : il faudra dans ce cas choisir un pas suffisamment petit ... donc des calculs plus coûteux qu'à la « normale ».

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

⑥ Quel pas h faut-il choisir pour qu'il n'y ait pas divergence ?

Conclusion : il faudra dans ce cas choisir un pas suffisamment petit ... donc des calculs plus coûteux qu'à la « normale ».

Remarque : On peut corriger le problème avec des méthodes de résolution implicites. On transforme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_{n+1}, h_n)$$

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

⑥ Quel pas h faut-il choisir pour qu'il n'y ait pas divergence ?

Conclusion : il faudra dans ce cas choisir un pas suffisamment petit ... donc des calculs plus coûteux qu'à la « normale ».

Remarque : On peut corriger le problème avec des méthodes de résolution implicites. On transforme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_{n+1}, h_n)$$

Mais non directement résoluble en y_{n+1} : Il faut appliquer des méthodes de résolution d'équations ...

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

⑥ Quel pas h faut-il choisir pour qu'il n'y ait pas divergence ?

Conclusion : il faudra dans ce cas choisir un pas suffisamment petit ... donc des calculs plus coûteux qu'à la « normale ».

Remarque : On peut corriger le problème avec des méthodes de résolution implicites. On transforme :

$$y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_n, h_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n \phi(t_n, y_{n+1}, h_n)$$

Mais non directement résoluble en y_{n+1} : Il faut appliquer des méthodes de résolution d'équations ...

Si l'équation différentielle est linéaire : $y_{n+1} = y_n + h_n A(y_n)$

(où A est une application linéaire), la résolution est néanmoins assez simple.

La transformation est : $y_{n+1} = y_n + h_n A(y_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n A(y_{n+1})$

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n A(y_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n A(y_{n+1})$$

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n A(y_n) \quad \rightsquigarrow \quad y_{n+1} = y_n + h_n A(y_{n+1})$$

Il s'agit donc de résoudre $(\text{Id} - h_n A)(y_{n+1}) = y_n$

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n A(y_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n A(y_{n+1})$$

Il s'agit donc de résoudre $(\text{Id} - h_n A)(y_{n+1}) = y_n$

C'est un système linéaire donc pas de problème de résolution pourvu que $\text{Id} - h_n A$ soit inversible (ce qui est le cas si h est suffisamment petit).

L'intérêt de ces méthodes est qu'elles sont naturellement plus stables.

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{n+1} = y_n + h_n A(y_n) \rightsquigarrow y_{n+1} = y_n + h_n A(y_{n+1})$$

Il s'agit donc de résoudre $(\text{Id} - h_n A)(y_{n+1}) = y_n$

C'est un système linéaire donc pas de problème de résolution pourvu que $\text{Id} - h_n A$ soit inversible (ce qui est le cas si h est suffisamment petit).

L'intérêt de ces méthodes est qu'elles sont naturellement plus stables.

Exemple d'application :

On reprend la méthode d'Euler précédente :

$$y_{n+1} = y_n + h(-150y_n + 30)$$

① Exprimer y_{n+1} en fonction de y_n et h avec la méthode de résolution implicite.

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 30h}{1 + 150h}$$

② Notons E'_n l'erreur commise au rang n par rapport à la solution exacte :

$$E'_n = y_n - \frac{1}{5}.$$

Exprimer E'_{n+1} en fonction de E'_n , puis E'_n en fonction de y_0 , h et n .

Instabilité due au schéma d'intégration (c'est-à-dire à la méthode)

Exemple :
$$\begin{cases} y' = -150y + 30 \\ y(0) = \frac{1}{5} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$y_{n+1} = \frac{y_n + 30h}{1 + 150h}$$

② Notons E'_n l'erreur commise au rang n par rapport à la solution exacte :

$$E'_n = y_n - \frac{1}{5}.$$

Exprimer E'_{n+1} en fonction de E'_n , puis E'_n en fonction de y_0 , h et n .

③ Prenons un pas $h = \frac{1}{50}$. Pour une erreur ε au départ, donner alors l'erreur commise dans l'évaluation en $t = 1$ (c'est-à-dire E'_{50}). Conclusion ?

Instabilité due à des cumuls d'erreurs d'approximation

Exemple :
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

La solution mathématique exacte est $y(t) = e^t$. Pour $y(0) = 1 + \varepsilon$, la solution est $\tilde{y}(t) = e^t + \varepsilon e^t$. Donc pas d'instabilité aux sens précédents.

Instabilité due à des cumuls d'erreurs d'approximation

Exemple :
$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

La solution mathématique exacte est $y(t) = e^t$. Pour $y(0) = 1 + \varepsilon$, la solution est $\tilde{y}(t) = e^t + \varepsilon e^t$. Donc pas d'instabilité aux sens précédents.

Pour appliquer les méthodes de Runge–Kutta, on choisit un pas constant $h = \frac{1}{N}$.

(Ici $y'(t) = F(t, y) = y(t)$.)

Déterminer pour les différentes méthodes y_{n+1} en fonction de y_n et h .

- ① Méthode d'Euler :
- ② Méthode du point milieu :
- ③ Méthode de Heun :
- ④ Méthode RK4 :
- ⑤ Méthode « exacte » :

On obtient un résultat de plus en plus précis (développement en série). Mais si h trop petit les erreurs d'arrondi se cumulent.

Évaluation de $y(1)$ pour l'équation $y' = y$ avec $y(0) = 1$

Erreur ($|y_N - e^1|$) en fonction du nombre N de subdivisions de $[0, 1]$

(10 valeurs de N par décade)

